Diamo Dimensione al Divertimento

Quello che accadde nei pressi di una stampante 3D

Classe A 1998

A cura di Silvia Monica

ISBN 9788898952083

Editato in Parma, agosto 2016

Questa trattazione è stata realizzata dagli alunni della classe 4 A (a.s. 2015-16) del liceo scientifico Attilio Bertolucci, sotto il coordinamento della prof.ssa Silvia Monica, docente di matematica e fisica.

Il documento è redatto in LaTeX. Il lavoro, dalla progettazione alla stesura finale del testo, revisioni incluse, è stato realizzato in circa 6 mesi (febbraio - luglio 2016).

Si ringrazia Leonardo Barbarini per le numerose e valide consulenze offerte nell'ambito della modellizzazione 3D e dell'utilizzo della strumentazione di stampa tridimensionale.

Tavola dei contributi

Coordinamento redazionale: prof.ssa Silvia Monica
Composizione: Alessia Alinovi, Rocco Pelosi, Davide Petrolini, Lorenzo Porti
Rilettura, revisione, correzione bozze: prof.ssa Silvia Monica, Virginia Alberini, Alessia Alinovi, Luca Cantoni, Giorgia Montis
Progetto grafico, impaginazione: Luca Cantoni, Eugenio Tanzi Cattabianchi

Stesura capitolo 1: aperture: Alessia Alinovi, Giorgia Montis, Rocco Pelosi; sezione 1.1: Salvatore Brunelli, Luca Guazzi, Davide Petrolini; sezione 1.2: Luca Guazzi, Giorgia Montis, Davide Petrolini
Stesura capitolo 2: Luca Cantoni
Stesura capitolo 3: Antonio Sandro Andrei, Alessandro Del Bono, Davide Zannetti; sezione 3.4: Massimo Buzzi, Luca Cantoni, Lucio Alberto Monti
Stesura capitolo 4: Filippo Bertini, Davide Lodi Rizzini, Rocco Pelosi
Stesura capitolo 5: Virginia Alberini, Alessia Alinovi, Giorgia Montis; sezione 5.4: Salvatore Brunelli, Leonardo Ferrari
Stesura capitolo 6: Salvatore Brunelli, Luca Guazzi, Davide Petrolini
Stesura capitolo 7: Massimo Buzzi, Luca Cantoni, Lucio Alberto Monti
Stesura capitolo 8: Lorenzo Porti, Leonardo Ferrari, Eugenio Tanzi Cattabianchi
Stesura capitolo 9: Francesco Feher, Gianluca Palù, Alessandro Ungari
Stesura capitolo 10: Virginia Alberini, Luca Cantoni
Stesura capitolo 11: Gianluca Palù, Lorenzo Porti
Stesura capitolo 12: Luca Cantoni
Stesura capitolo 13 (a cura di): Luca Cantoni; fotografia di Antonio Sandro Andrei.

Indice

1. Introduzione

Durante l'anno scolastico 2015-2016, la classe 4 A del liceo Scientifico Attilio Bertolucci ha intrapreso un progetto riguardante lo studio dei poliedri. Questo consisteva nell'analizzare, in più gruppi, diverse tipologie di solidi e di utilizzare la stampante 3D presente nella scuola. Unire l'aspetto teorico e quello pratico ci ha permesso di avere una visone più completa dell'argomento, senza dimenticare di dare dimensione al divertimento. Il progetto si è sviluppato in diverse fasi: la prima, dedicata allo studio del gruppo di solidi assegnatoci; successivamente abbiamo avuto l'opportunità di utilizzare la stampante 3D, il cui uso sarà spiegato in seguito, per stampare i solidi necessari; la terza fase è stata dedicata alla composizione dei differenti elaborati. Infine è stato redatto questo testo con lo scopo di riunire tutte le varie tessere del puzzle 3D.

1.1 Stampante 3D

Per la realizzazione materiale dei solidi abbiamo utilizzato una stampante 3D in grado di realizzare piccoli oggetti di uso comune o per le più svariate applicazioni nel campo matematico, da noi più precisamente utilizzata per la costruzione di solidi particolari.

Come si usa una stampante 3D?

Software necessari:

- *Cura*;
- *123D* (o comunque una suite in grado di modificare i solidi nel caso sia necessario);
- plastica per la stampante;
- scheda SD;
- progetto del solido da stampare in formato *.stl* o *.wrl* (dipende dalla stampante).

La prima fase consiste nel cercare in rete il progetto del solido che occorre. Sarebbe possibile anche cercare di progettarlo da capo ma risulterebbe molto difficile e richiederebbe competenze specifiche.

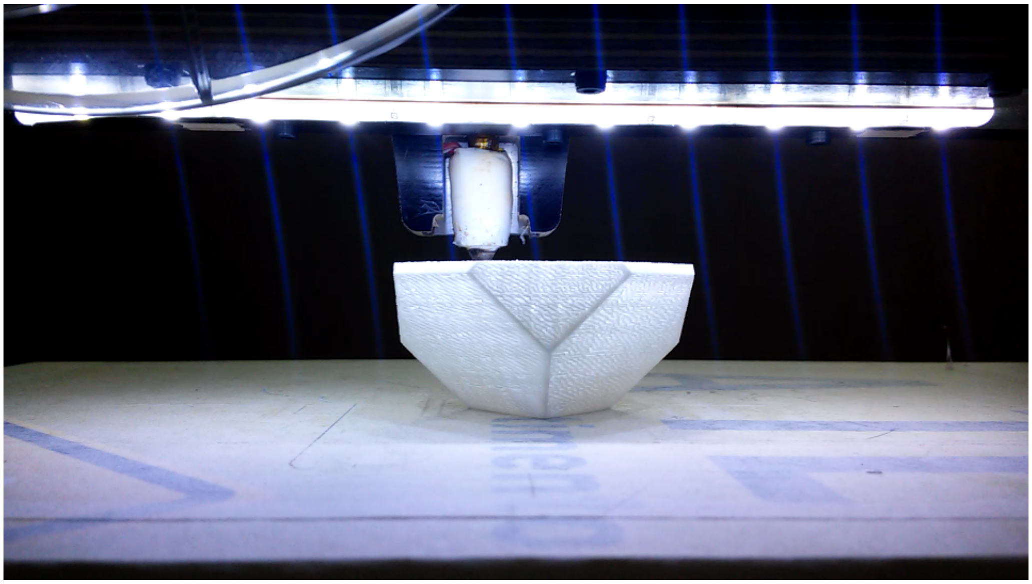


Figura 1.1: Stampante 3D in azione

Una volta trovato il progetto - i siti più utili sono *Thingiverse* (`www.thingiverse.com`) o *Tinkercad* (`www.tinkercad.com`) ma anche *Yobi 3D* (`www.yobi3d.com`) - è necessario controllarlo con il software *Cura*. Infatti affinché sia possibile stamparlo, il solido deve avere una faccia intera poggiata sul piano di *Cura* (ch coincide con il piano di stampa). Questo si può controllare tramite una funzione del programma che mostra strato per strato le stampe. Nel caso in cui non poggiasse sul piano, *Cura* consente di ruotare il solido.

In un secondo momento si passa a controllare la parte tecnica della stampa. In questo caso è necessario controllare la velocità di stampa, che influirà sulla precisione della stampa (più veloce meno precisa, più lenta più precisa), la densità della stampa (nel caso di solidi fragili, si cerca di renderlo più stabili). Ovviamente con *Cura* si possono anche aumentare o diminuire le dimensioni del solido.

Giunti a questo punto si può caricare il progetto su una scheda SD e aspettare che la stampante raggiunga la temperatura di 210 °C per poi osservare la prima stampa.

1.1.1 Nel caso in cui si voglia sezionare il solido

Si può importare un progetto da *Thingiverse* su *Tinkercad*, o su *123D*. Per sezionarlo basta aggiungere un solido primitivo (ad esempio un parallelepipedo) e assegnare ad esso la proprietà "Hole". Poi bisogna selezionare il gruppo come "Group" e il solido verrà stampato sezionato.

1.2 Chiralità e dualità

Immaginate di porvi di fronte ad uno specchio e di osservare l'immagine riflessa della vostra mano. *Cosa notereste?* Un fatto interessante è che quella mano *al di là dello specchio* non potrà essere in nessun modo sovrapposta con rotazioni o traslazioni alla vostra mano che si trova di fronte allo specchio: il che significa - in modo equivalente e meno contorto - che la mano destra e quella sinistra non possono essere sovrapposte (non vale capovolgere una mano ruotandola nello spazio!). Quando si parla di *immagine riflessa*, si sottintende il fatto che sia avvenuta una *trasformazione geometrica*, che dal punto di vista matematico è una funzione biiettiva: ecco che diventa significativo analizzare i rapporti tra trasformato e anti-trasformato, tra immagine e controimmagine - essendo una trasformazione geometrica una biiezione. È da queste considerazioni che traggono origine i concetti di **chiralità** e **dualità**: essi descrivono importanti proprietà impiegate nello studio dei solidi, in particolare usate per spiegare quale rapporto intercorre tra un oggetto e il suo trasformato, tra un solido e la sua "immagine riflessa nello specchio".

Osserviamo invece che in alcuni casi gli oggetti o i loro elementi costitutivi si scambiano la rispettiva funzione. Talvolta, applicando opportune trasformazioni, gli oggetti matematici (che nel nostro caso sono poliedri) vengono trasformati in altri, in modo che tutti i teoremi continuino a valere applicando anche ad essi la stessa trasformazione.

Una cosa simile accade con le leggi di De Morgan, in cui l'operazione di somma e di prodotto logico si scambiano in ogni loro occorrenza, pur mantenendo la validità della legge:

$$\overline{p \cdot q} = \overline{p} + \overline{q}$$

$$\overline{p + q} = \overline{p} \cdot \overline{q}$$

Nel caso dei poliedri preso qui in esame, ciò che si scambia la funzione sono facce e vertici. Si tratta pertanto di un concetto molto complesso che in realtà pervade moltissimi campi della matematica: algebra (intersezione e unione), geometria dei poliedri (facce e vertici), geometria proiettiva (punti e rette), logica (congiunzione e disgiunzione), ecc. (fonte `http://www.treccani.it/enciclopedia/dualita/`).

> "In matematica il tema della dualità è importante e pervasivo, ma non vi è una definizione universalmente accettata in grado di unificare tutte le sue accezioni."
>
> (tratta da `https://it.wikipedia.org/wiki/Dualità_(matematica)`)

1.2.1 Chiralità

La chiralità è una proprietà di una figura, valida nel momento in cui la figura stessa e la sua trasformata non possono essere sovrapposte tramite una traslazione o una rotazione. Un altro modo per esprimere tale concetto può essere il seguente.

Definizione 1.2.1 Una figura geometrica o un insieme di punti è chirale se ha la proprietà di essere non sovrapponibile alla propria immagine speculare.

Sono chirali, per esempio, le mani (la parola "chiralità" deriva dal greco χείρ, "mano"): la mano destra e quella sinistra sono immagini speculari l'una dell'altra, ma non possono essere in alcun modo sovrapposte, ad esempio tramite una rotazione o traslazione.

La chiralità è una proprietà molto importante per la chimica: essa viene riferita alla struttura delle molecole, alcune delle quali per reagire necessitano del "giusto incastro" (immaginate voi se dovendo stringere la mano a qualcuno ne usassimo una diversa da quella che ci viene offerta...).

Definizione 1.2.2 In matematica, un oggetto geometrico è chirale se è differente dalla sua immagine.

Il termine "differente" indica che tramite un'operazione di traslazione o rotazione non è possibile sovrapporre la figura immagine alla sua controimmagine.

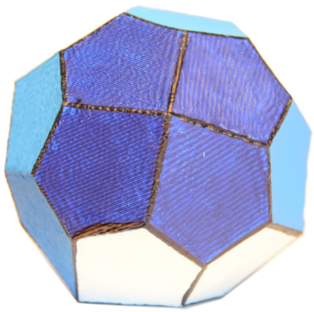


Figura 1.2: L'icositetraedro pentagonale (duale del cubo camuso) è chirale

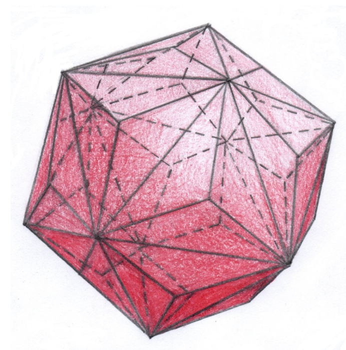


Figura 1.3: Il triacisicosaedro (duale del dodecaedro troncato) non è chirale

Il concetto di chiralità si applica alle figure del piano e a quelle dello spazio. Nel caso del nostro studio, l'attenzione è tutta rivolta allo spazio. Considerando i **solidi platonici**, questi **non sono chirali**. Infatti essi ammettono diverse e numerose simmetrie, la maggior parte sono riflessioni. Come casi particolari devono essere segnalati il cubo simo (anche detto "camuso", 5.2.12) e il dodecaedro camuso (si veda il paragrafo 5.2.13): questi sono solidi archimedei chirali.

1.2.2 Dualità

È possibile applicare il concetto di dualità a diversi ambiti, come quello matematico, logico e geometrico.

Definizione 1.2.3 Dati due poliedri A e B, essi sono duali se esiste tra loro una corrispondenza biiettiva che associa a una faccia, a uno spigolo e a un vertice di A, una faccia, uno spigolo e un vertice di B.

Il poliedro B si dice "duale" di A.

È possibile esemplificare la definizione nel modo seguente. Sia dato un ottaedro. Tale poliedro possiede otto facce, sei vertici e dodici spigoli. Scambiando il suo numero di facce al numero dei vertici, e viceversa, sostituendo il numero dei vertici con il numero delle facce, si ottiene un cubo. Il cubo è il duale di un ottaedro. È possibile applicare un ragionamento analogo a qualunque poliedro.

$$(F, V, S)_{\text{ottaedro}} = (8, 6, 12)$$
$$(F, V, S)_{\text{cubo}} = (6, 8, 12)$$

La dualità è una funzione per cui è possibile definire la **proprietà di simmetria**: dati due poliedri A e B, se B è il duale di A, allora A è il duale di B.

Inoltre la dualità agisce in modo da mantenere le rispettive adiacenze e incidenze. Per esempio, se un vertice di A è adiacente ad uno spigolo di A, la corrispondente faccia di B è adiacente al corrispondente spigolo di B.

1.2.3 La dualità conserva la chiralità

In rari questo vincolo non viene rispettato, pertanto, a meno di quegli esigui casi eccezionali, possiamo affermare che **la dualità conserva la chiralità**. Una prima considerazione che si può fare è la seguente: se i poliedri di Archimede, allora i poliedri duali dei solidi archimedei, ovvero i solidi di Catalan (si veda il capitolo 7), sono anch'essi chirali. Passiamo ora ad analizzare due casi di dualità reciproca, in cui la dualità conserva la chiralità. Il cubo è infatti il duale dell'ottaedro e viceversa l'ottaedro è il duale del cubo. Se si considerano questi due esempi distinti e le figure delle composizioni dei due solidi duali, si nota immediatamente come esse siano differenti. Proprio per questo possiamo individuare una connessione tra dualità e chiralità. I due esempi non sono uguali anche se per definizione è uno opposto all'altro, come nella chiralità lo è il solido e la sua immagine riflessa.

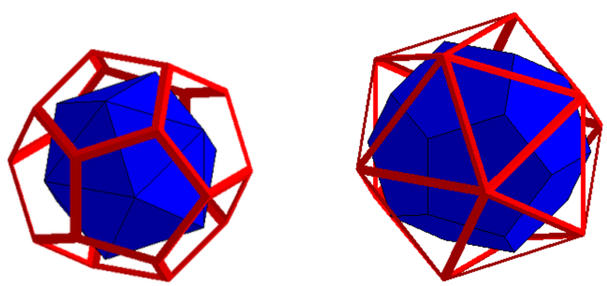


Figura 1.4: L'icosaedro è il poliedro duale del dodecaedro, il dodecaedro è il poliedro duale dell'icosaedro (fonte: `www.wikipedia.org`)

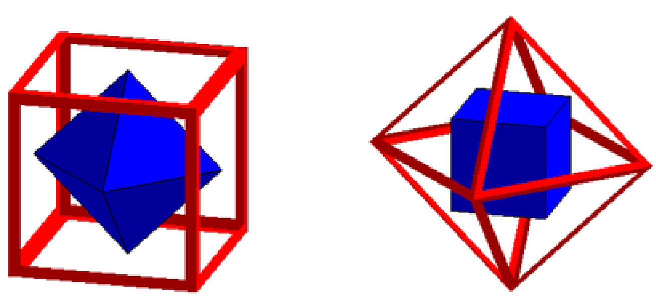


Figura 1.5: L'ottaedro è il poliedro duale del cubo, il cubo è il poliedro duale dell'ottaedro (fonte: `www.wikipedia.org`)

2. Nozioni essenziali sui poliedri

Prima di iniziare la trattazione vera e propria, pensiamo sia opportuno dedicare qualche pagina ad alcune nozioni necessarie (talvolta non sufficienti) a cogliere l'analisi dei poliedri illustrata nei capitoli che seguono. Presentiamo dunque le definizioni e i teoremi fondamentali (alcuni saranno richiamati esplicitamente nel corso della trattazione) relativi ai poliedri e alle loro caratteristiche.

2.1 Superficie poliedrale e poliedro

Definizione 2.1.1 Si definisce una **superficie poliedrale** come un numero finito di poligoni nello spazio tali che:

1. l'intersezione di due facce è vuota oppure uno spigolo o un vertice;
2. ogni spigolo appartiene precisamente a due facce;
3. due facce adiacenti non sono complanari;
4. fissato un vertice v e due facce f e g,incidenti su v, esiste una catena di facce $f_1, \ldots, f_n$ contenenti v tali che $f = f_1$, $g = f_n$ e f_i sia adiacente a f_{i+1} per ogni i.

Come conseguenza, dalla definizione di superficie poliedrale si può cogliere intuitivamente il seguente teorema:

Teorema 2.1.1 Ogni superficie poliedrale divide lo spazio in due regioni, una delle quali limitata.

Il termine "poliedro" deriva dal greco πολύεδρον, composto da πολύς, ovvero "molto", e ἕδρον, cioè "faccia".

Definizione 2.1.2 Si definisce **poliedro** la regione limitata individuata da una superficie poliedrale.

2.2 Alcune proprietà e definizioni

2.2.1 Relazione di Eulero

Per qualsiasi poliedro convesso vale la relazione di Eulero che possiamo esprimere in questi termini: dati un poliedro P, il numero delle sue facce F, il numero dei suoi spigoli S e il numero dei suoi vertici V, è sempre valida la relazione

$$F - S + V = 2.$$

2.2.2 Figura al vertice

Si scelga un vertice a caso del poliedro che si sta studiando. Individuare gli spigoli che concorrono in esso e il loro punto medio. Unendo i punti medi così individuati si ottiene una figura, non necessariamente piana, detta figura al vertice. Dato che per tre punti passa sempre uno ed un solo piano, quando nel vertice concorrono solo tre spigoli, la figura al vertice è sicuramente piana. Negli altri casi, si deve valutare di volta in volta. La figura al vertice riveste un ruolo particolarmente centrale nello studio dei poliedri e possono verificarsi molti casi differenti: potrebbero esserci diverse figure al vertice a seconda dello spigolo che si esamina all'interno dello stesso poliedro, oppure le figure al vertice potrebbero essere tutte uguali ma non poligoni regolari, oppure ancora potrebbero essere tutte poligoni regolari ma non uguali fra loro...

Definizione 2.2.1 Si definisce **figura al vertice** di un poliedro la figura (*non* necessariamente piana) i cui lati sono i segmenti che congiungono i punti medi degli spigoli uscenti da uno stesso vertice.

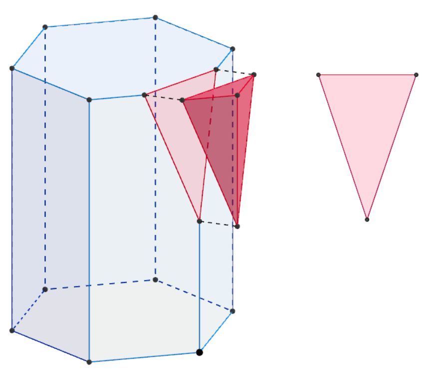


Figura 2.1: Come identificare idealmente la figura al vertice

Quando le figure al vertice sono regolari si dice che il poliedro è **V-regolare** e quindi gode di elevate proprietà di simmetria. Tuttavia, non necessariamente un poliedro V-regolare è anche regolare: è questo il caso del decadeltaedro, un deltaedro V-regolare (le figure al vertice sono quadrati e pentagoni regolari) che *non* è regolare.

Definizione 2.2.2 Un poliedro si dice V-regolare se le figure al vertice sono tutte poligoni regolari.

Se le figure al vertice di un poliedro sono tutte congruenti tra loro, allora il poliedro sarà detto **omogeneo**.

Definizione 2.2.3 Un poliedro si dice omogeneo se ha figure al vertice tutte congruenti.

2.2.3 Valenza (di un vertice)

Definizione 2.2.4 Si definisce **valenza** di un vertice V di un poliedro il numero di spigoli uscenti da esso.

2.2.4 Bandiera di un poliedro

In matematica, definiremmo una bandiera per le tassellature come un oggetto costituito da un punto attorno al quale viene disposto un certo numero di poligoni regolari tali che gli angoli disposti attorno al suddetto punto costituiscano l'angolo giro.

Per quanto riguarda la geometria solida e in particolare i poliedri, la definizione riscontra analogie con la bandiera di una tassellatura.

Definizione 2.2.5 Si chiama bandiera di un poliedro P una terna (v, s, f) dove v è un vertice, s è uno spigolo, f è una faccia di P, ed inoltre $v < s < f$.

2.3 Poliedro regolare (anticipazione)

Definizione 2.3.1 Si definisce **regolare** un poliedro in cui:
1. tutte le facce sono poligoni regolari;
2. tutte le facce sono uguali fra loro;
3. tutte le figure al vertice sono poligoni regolari;
4. tutte le figure al vertice sono uguali fra loro.

Tuttavia, delle quattro condizioni espresse le prime tre sono **sufficienti** a stabilire se un poliedro è regolare o meno: la quarta condizione deriva direttamente dalle precedenti. In realtà, possiamo ridurre ulteriormente la lista delle condizioni.

Teorema 2.3.1 Condizione necessaria e sufficiente affinché un poliedro sia regolare è che le sue facce e le figure al vertice siano rispettivamente poligoni regolari e bordi di poligoni regolari.

2.4 La rigidità dei poliedri "costruiti"

Teorema 2.4.1 — Teorema di rigidità di Cauchy. Siano P e P' due poliedri convessi e sia T un isomorfismo fra P e P', supponiamo inoltre che le facce corrispondenti siano congruenti, allora anche gli angoli tra coppie corrispondenti di facce adiacenti sono uguali (e pertanto P è congruente a P').

3. Poliedri regolari e loro duali

3.1 I poliedri regolari

Definizione 3.1.1 Si definisce poliedro regolare un qualsiasi poliedro convesso che abbia come facce dei poligoni regolari e avente tutti gli spigoli e i vertici, intesi come angoli solidi, congruenti tra loro.

I poliedri regolari **sono solo 5**:

- tetraedro: possiede 4 facce, 4 vertici, 6 spigoli e le sue facce sono costituite da triangoli equilateri;
- esaedro: conosciuto comunemente come cubo, possiede 6 facce, 8 vertici, 12 spigoli e e le sue facce sono costituite da quadrati;
- ottaedro: possiede 8 facce, 6 vertici, 12 spigoli e le sue facce sono costituite da triangoli equilateri;
- dodecaedro: possiede 12 facce, 20 vertici, 30 spigoli e le sue facce sono costituite da pentagoni regolari;
- icosaedro: possiede 20 facce, 12 vertici, 30 spigoli e le sue facce sono costituite da triangoli equilateri.

3.2 Proprietà dei poliedri regolari

Questi solidi hanno 4 proprietà che li accomunano:

1. ognuno di essi ha un **centro** che è **equidistante da tutte le facce** e tutti i vertici;
2. la distanza del centro da un vertice è chiamata **raggio** del poliedro regolare;
3. le facce opposte sono **a due a due parallele** come lo sono anche gli spigoli, per questo si parla di facce opposte, spigoli opposti e vertici opposti (non vale per il tetraedro);
4. le facce sono **"indistinguibili"** nel senso che, prendendo due facce qualsiasi, si può sempre ruotare il poliedro in modo tale che la prima faccia vada a occupare la posizione iniziale della seconda e che globalmente il poliedro non cambi.

3.3 Perché solo 5?

Per costruire un poliedro regolare si inizia scegliendo un punto, che rappresenterà uno dei suoi futuri vertici, attorno al quale vengono disposti i poligoni regolari che formeranno le facce del poliedro. Tali poligoni regolari non possono essere scelti in qualsiasi modo, perché la somma degli angoli che si potranno misurare in quel vertice scelto dovrà essere minore di 360°. *Perché accade questo?* Se la somma degli angoli fosse esattamente di 360°, si otterrebbe un ricoprimento del piano, anziché un angoloide convesso. Se poi tale somma fosse maggiore, non si riuscirebbe affatto a costruire l'angoloide convesso. Vediamo allora quali sono i casi che si possono presentare, esaminando tutti i poligoni regolari uno alla volta, fino a quando si rivelerà impossibile procedere continuando a formare poliedri.

Esaminando tutti i casi che si possono presentare, si osserva che con 7 triangoli non potrà essere costruito alcun angoloide. Se poniamo tre quadrati in un vertice si ottiene il cubo, mentre se ne poniamo 4 si forma un quadrato più grande che è sul piano e se ne poniamo 5 ricadiamo nel caso precedente dei 7 triangoli. Passando ai pentagoni, ponendone tre su un vertice si ottiene il dodecaedro, mentre 4 fanno sì che la somma degli angoli nel vertice superi l'angolo giro e quindi non si possono posizionare.

Infine, se consideriamo poligoni con più di cinque lati, osserveremo che non si riuscirà a posizionarli unendo lato con lato attorno allo stesso vertice. Basta provare con l'esagono per controllare che con tre di essi (il minor numero possibile per formare un angoloide) si ottiene già un ricoprimento del piano. Qualsiasi poligono con più lati perciò non potrà essere utilizzato a maggior ragione.

Ecco quindi che i poligoni effettivamente utilizzabili per costruire un poliedro regolare sono solo tre: triangolo, quadrato e pentagono, e il triangolo, come ci si aspetta, è quello che permette la maggiore flessibilità e la costruzione di più poliedri, proprio in virtù della piccola ampiezza dei suoi angoli.

Certo, se variamo i poligoni utilizzabili, eliminando la condizione che siano tutti dello stesso tipo e congruenti fra loro, allora il discorso cambia e si potranno costruire tantissimi poliedri, i quali tuttavia non saranno regolari. Di questi si potranno vedere esempi nei successivi capitoli.

3.4 Gruppi di simmetrie

In matematica, una simmetria è un'operazione che muove o trasforma un oggetto lasciandone però inalterato l'aspetto. Generalmente, le simmetrie di un oggetto formano un gruppo, detto gruppo delle simmetrie.

Un gruppo di simmetrie, per essere definito tale, deve:

1. avere una "legge di composizione" interna (la composizione di ogni coppia di suoi elementi è ancora un elemento del gruppo);
2. avere una trasformazione I che si comporta da unità rispetto alla composizione;
3. contenere l'inverso di ogni elemento (cioè se S è un elemento del gruppo, allora nel gruppo esiste anche un elemento S^{-1} tale che $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = I$);
4. godere della proprietà associativa.

Queste proprietà si possono tradurre in questo modo:

1. chiusura rispetto al prodotto;
2. esistenza elemento neutro;

3. esistenza elemento inverso;
4. proprietà associativa.

I gruppi di simmetria nello spazio, rispetto a quelli nel piano, sono formati da un numero maggiore di isometrie.

Definizione 3.4.1 Un'isometria o movimento rigido nello spazio è una trasformazione dello spazio in sé che preserva la distanza, per ogni coppia di punti.

L'insieme di tutte le isometrie forma un gruppo. Le isometrie che formano questi gruppi sono definite dal **teorema di Charles**.

Teorema 3.4.1 — Teorema di Charles. Le uniche isometrie nello spazio sono: la traslazione, la rotazione, la riflessione, la glisso-riflessione, la roto-riflessione (composizione di una riflessione e di una rotazione di asse ortogonale al piano di riflessione), la roto-traslazione (composizione di una retta e di una traslazione parallela all'asse).

I solidi platonici a seconda delle loro simmetrie possono essere suddivisi in tre famiglie distinte:

1. tetraedro;
2. cubo e ottaedro;
3. dodecaedro e icosaedro.

3.4.1 Tetraedro

Il tetraedro ha 24 simmetrie: tra queste, 12 sono rotazioni intorno a 7 diversi assi, mentre le altre 12 invertono l'orientamento dei punti nello spazio (riflessioni e glisso-riflessioni).

L'asse di rotazione di una simmetria può collegare il centro di una faccia con un vertice opposto (4 possibilità), oppure i punti medi di due spigoli opposti (3 possibilità). Intorno ad un asse del primo tipo possono essere effettuate rotazioni di 120°, 240° o 360° (identità), mentre intorno ad un asse del secondo tipo la rotazione è di 180° oppure di 360° (identità). In totale, si ottengono quindi 12 rotazioni.

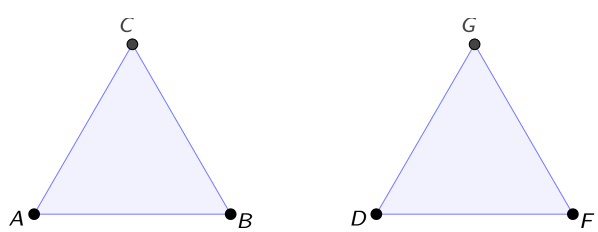


Figura 3.1: Faccia del tetraedro e del suo duale

3.4.2 Cubo e ottaedro

L'ottaedro, come il cubo, ha 24 simmetrie rotazionali, cioè che preservano l'orientamento dello spazio, più altre 24 simmetrie che non lo preservano. Il gruppo di simmetria dell'ottaedro conta quindi di un totale di 48 elementi.

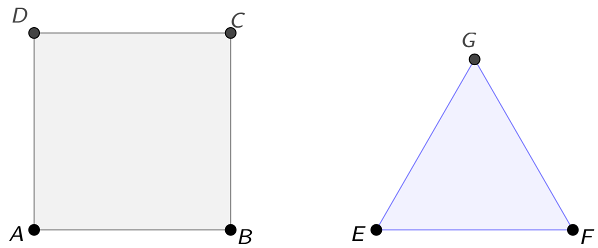


Figura 3.2: Faccia del cubo e ottaedro, reciprocamente duali

3.4.3 Dodecaedro e icosaedro

L'icosaedro, invece, come il dodecaedro possiede 120 simmetrie: 60 sono rotazioni, mentre le altre invertono l'orientamento dei punti dello spazio (riflessioni e glisso-riflessioni). Il gruppo di simmetrie dell'icosaedro è quindi fatto di 120 elementi.

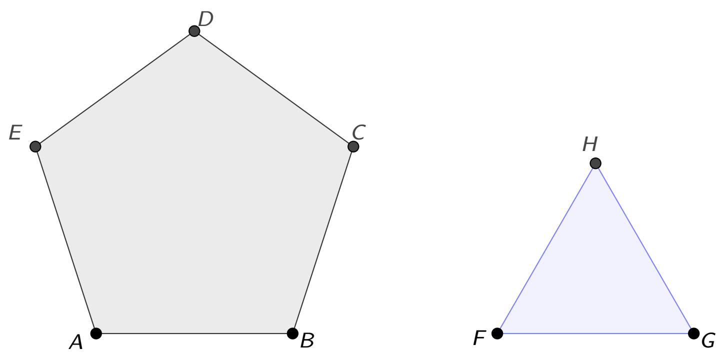


Figura 3.3: Faccia del dodecaedro e dell'icosaedro, reciprocamente duali

Le simmetrie dei solidi regolari possono essere riassunte nella tabella che segue.

	Rotazioni	**Riflessioni**	**Roto-riflessioni**	Totale
TETRAEDRO	12	6	6	24
CUBO O OTTAEDRO	24	9	15	48
DODECAEDRO E ICOSAEDRO	60	15	45	120

Tabella 3.1: Simmetrie dei solidi regolari

Queste tre famiglie in cui i poliedri regolari si dividono, sono determinate dalle loro simmetrie, e per questo motivo poliedri di una stessa famiglia hanno esattamente le stesse rotazioni e le stesse riflessioni. **Le simmetrie di una stessa famiglia formano un gruppo di simmetria.**

Si ottengono dunque il gruppo di simmetria del tetraedro, cioè il **gruppo Tetraedrico**, quello dell'ottaedro e del cubo, cioè il **gruppo Ottaedrico**, e infine quello dell'icosaedro e del dodecaedro, il **gruppo Icosaedrico**:

	Solo rotazioni	Rotazioni e riflessioni
TETRAEDRO	T	T_d
CUBO E OTTAEDRO	O	O_h
DODECAEDRO E ICOSAEDRO	I	I_h

Tabella 3.2: Gruppi di simmetria associati ai poliedri regolari

3.5 La sezione aurea

Definizione 3.5.1 La sezione aurea di un segmento è una parte del segmento stesso, tale che essa stessa è media proporzionale fra il segmento complessivo e la parte rimanente. La sezione aurea è il segmento b.

Si definisce così il rapporto

$$l : b = b : a,$$

dove l è la lunghezza totale del segmento, b è la lunghezza della parte maggiore e a è la lunghezza della parte minore, pari alla differenza $l - b$. Il rettangolo costruito in modo che la lunghezza di una coppia di lati sia pari a l e l'altra coppia di lati pari a b (ovvero i valori della proporzione riportata precedentemente) viene chiamato rettangolo **aureo**.

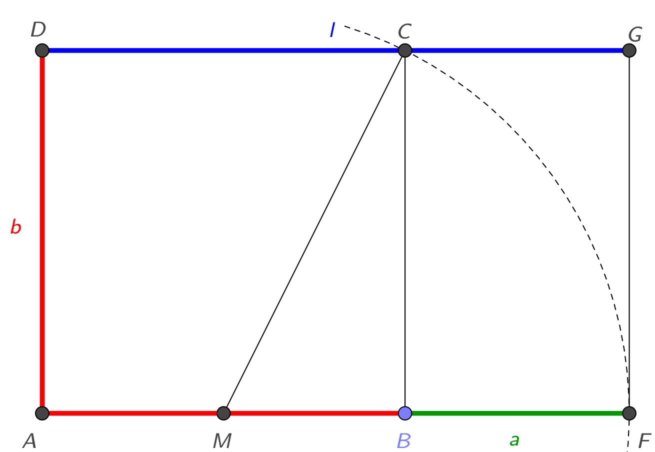


Figura 3.4: Esempio di rettangolo aureo $AFGD$

La sezione aurea viene spesso utilizzata in ambito geometrico, ma ad essa è associabile un numero irrazionale ϕ, limite dei rapporti tra due termini consecutivi che si ottengono dalla successione di Fibonacci. Possiamo dunque scrivere che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi,$$

sapendo che F_n è la successione di Fibonacci, definita ricorsivamente come

$$F_n : \begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} .$$

Definizione 3.5.2 La sezione aurea, o rapporto aureo, ha il valore $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nei poliedri regolari è possibile trovare un collegamento con il rapporto aureo essendo le facce costituite da figure piane; in particolare l'icosaedro è composto da 20 facce triangolari e il dodecaedro 12 facce pentagonali. Nel dodecaedro per esempio le dodici facce pentagonali si possono raggruppare quattro a quattro e ciascuno di questi gruppi corrisponde ai vertici di un rettangolo aureo.

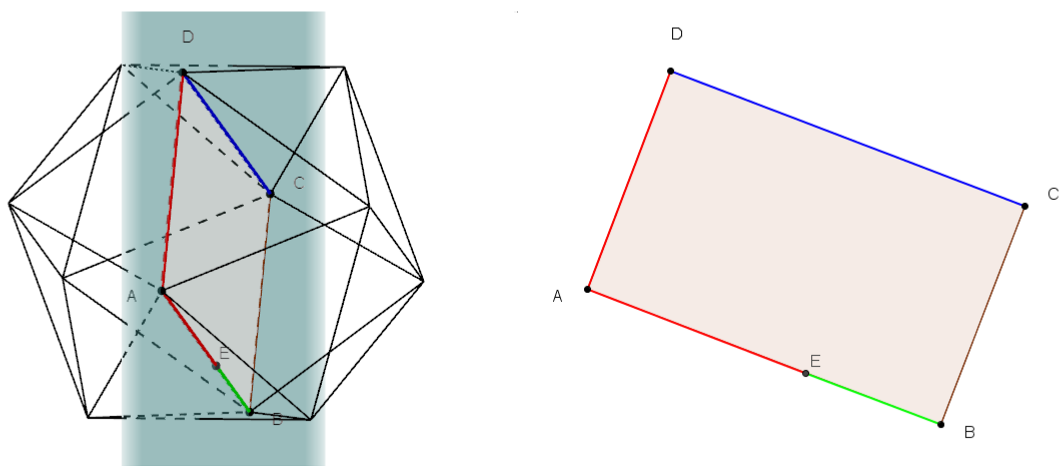


Figura 3.5: Rettangolo aureo inscritto in un icosaedro

4. Prismi retti uniformi e antiprismi uniformi

4.1 Figure al vertice di prismi regolari uniformi

Prima di tutto forniamo una definizione di **prisma**.

Definizione 4.1.1 Si definisce prisma (definito) il poliedro costituito dalla parte di un prisma indefinito compresa tra due piani paralleli che lo intersecano.

Di seguito definiamo i termini "**retto**" e "**uniforme**".

Definizione 4.1.2 Un prisma si definisce retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

Definizione 4.1.3 Un prisma si definisce uniforme se è regolare sui vertici (ovvero tutte le figure al vertice sono uguali) e ha le facce costituite da poligoni regolari: le facce laterali sono dunque quadrati.

Per la definizione di **figura al vertice** si consulti di nuovo il paragrafo 2.2.2.

4.1.1 Prisma retto a base esagonale

Nel prisma retto a base esagonale la figura al vertice (evidenziata nella figura 4.1) è un triangolo isoscele. Questo accade perché l'altezza del solido è diversa dal lato dell'esagono di base.

Figura 4.1: Figura al vertice di un prisma retto uniforme a base esagonale

4.1.2 Prisma retto a base pentagonale

Anche nel prisma retto a base pentagonale la figura al vertice appare come un triangolo isoscele, poiché l'altezza del solido non coincide con la lunghezza del lato del pentagono di base.

4.1.3 Prisma retto a base ottagonale

Come nei solidi precedenti, la figura al vertice di un prisma retto a base ottagonale è un triangolo isoscele.

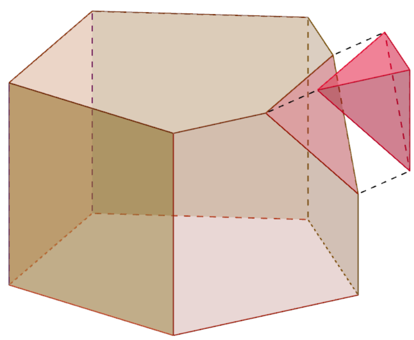


Figura 4.2: Figura al vertice di un prisma retto uniforme a base pentagonale

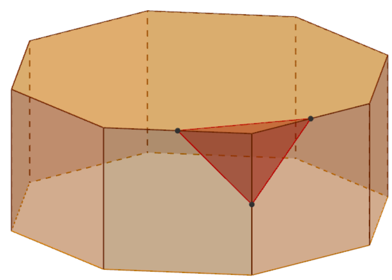


Figura 4.3: Figura al vertice di un prisma retto uniforme a base ottagonale

4.1.4 Cubo

A questo punto analizziamo il caso di un solido in cui l'altezza coincide con il lato della figura di base: la figura al vertice sarà un triangolo equilatero. La figura canonica con l'altezza uguale al lato della base, adatta per questo esempio, è il cubo, in cui è evidente il fatto che il triangolo sia equilatero.

Figura 4.4: Figura al vertice del cubo

Possiamo quindi affermare che in tutti i poliedri regolari uniformi le figure al vertice sono triangoli isosceli, a meno che nel solido l'altezza non corrisponda al lato della base: in tal caso la figura al vertice è un triangolo equilatero.

4.2 Figure al vertice di antiprismi uniformi

In questo paragrafo analizzeremo le figure al vertice degli antiprismi uniformi.

Anche qui prima dell'analisi delle figure al vertice di alcuni esempi di antiprismi, forniamo la definizione di **antiprisma**.

Definizione 4.2.1 Gli antiprismi sono solidi le cui facce sono poligoni regolari congruenti intervallate da un ciclo di triangoli isosceli o equilateri.

Definiamo inoltre l'antiprisma **uniforme** (analogamente a quanto espresso per il prisma uniforme).

Definizione 4.2.2 Un antiprisma si definisce uniforme se è regolare sui vertici (ovvero tutte le figure al vertice sono uguali) e ha le facce costituite da poligoni regolari: le facce laterali sono dunque triangoli equilateri.

4.2.1 Antiprisma a base esagonale

La figura al vertice di questo antiprisma è un trapezio isoscele.

4.2.2 Antiprisma a base quadrata

Anche in quest'altro solido la figura al vertice corrisponde ad un trapezio isoscele.

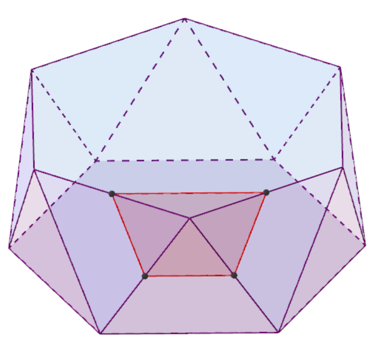


Figura 4.5: Figura al vertice di un antiprisma uniforme a base esagonale

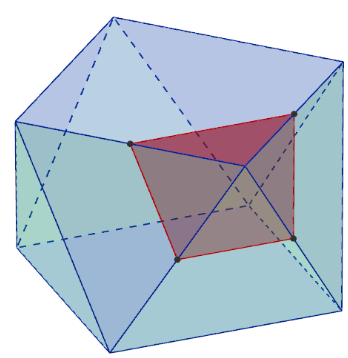


Figura 4.6: Figura al vertice di un antiprisma uniforme a base quadrata

4.2.3 Antiprisma a base ottagonale

Nell'antiprisma a base ottagonale è evidente come la figura al vertice ottenuta sia un trapezio isoscele.

4.2.4 Antiprisma a base pentagonale

Infine notiamo che anche nell'antiprisma a base pentagonale è il trapezio isoscele la figura al vertice del solido.

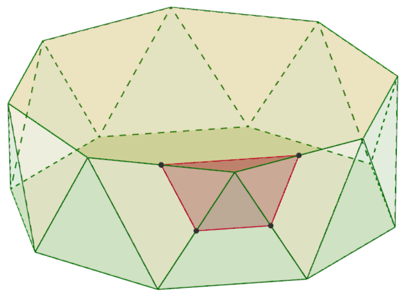


Figura 4.7: Figura al vertice di un antiprisma uniforme a base ottagonale

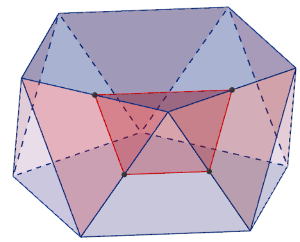


Figura 4.8: Figura al vertice di un antiprisma uniforme a base pentagonale

Come si evince da questi esempi, possiamo affermare che le figure al vertice degli antiprismi uniformi sono sempre trapezi isosceli, sia nel caso in cui i triangoli che intervallano le due basi siano equilateri oppure isosceli.

5. Poliedri archimedei e poliedro di Miller

Figura 5.1: Alcuni solidi archimedei realizzati con la stampante 3D

Definizione 5.0.1 Un solido archimedeo è un poliedro convesso le cui facce sono costituite da poligoni regolari e i cui vertici sono omogenei.

Il loro nome deriva da Archimede, il quale ha presentato questi solidi in una sua opera ormai perduta. Durante il Rinascimento vari artisti matematici li hanno riscoperti cercando di valorizzare le pure forme. Questa ricerca è stata terminata da Keplero intorno al 1619.

5.1 Caratteristiche e proprietà

Le proprietà più importanti dei poliedri archimedei o semiregolari sono elencate di seguito.

1. I vertici di un solido sono tutti omogenei, cioè sono uguali. Più precisamente, immaginate di scegliere un vertice qualunque e di individuare i punti medi degli spigoli uscenti dal vertice scelto: scegliendo il piano che passa per tali punti medi, esso stacca una piccola piramide (cuspide). Tali cuspidi sono identiche (sono ottenibili una dall'altra tramite rotazione).
2. Tutte le facce dei soliti sono formate da poligoni regolari.
3. Gli spigoli sono tutti congruenti. Questa caratteristica viene spiegata attraverso la seconda proprietà fondamentale menzionata.

La lunghezza a di uno spigolo è quindi un parametro che determina la grandezza globale del poliedro: variazioni di a trasformano il poliedro tramite similitudine (ovvero il rapporto tra le distanza si conserva). In funzione di a si possono calcolare il volume e l'area di superficie di ogni poliedro archimedeo.

I solidi archimedei si differenziano sia dai solidi platonici che da quelli di Johnson: i primi hanno anche le facce omogenee, mentre i vertici degli altri non sono omogenei.

Per essere definiti archimedei, inoltre, è indispensabile che i solidi non siano prismi o antiprismi. Queste due ultime classi di poliedri formano due infinite famiglie infinite di solidi, mentre quelli archimedei sono un numero finito. Inoltre prismi e antiprismi ammettono poche simmetrie.

I solidi archimedei sono 13, anche se del cubo camuso e del dodecaedro camuso esistono due forme definite chirali aventi le caratteristiche degli archimedei ma che non sono equivalenti alla loro immagine riflessa. Per questa ragione, in alcuni elenchi di poliedri, cubo camuso e dodecaedro camuso sono presenti due volte e, in tali casi, il conteggio effettivo ammonta a 15 solidi archimedei.

I solidi archimedei hanno la caratteristica di essere semiregolari, cioè hanno proprietà di regolarità ed elevata simmetria ma non sono regolari. Essi hanno due tipi di facce: formate da poligoni regolari diversi fra loro e aventi vertici omogenei oppure formate da un solo tipo di faccia e in questo caso si ricade nei solidi platonici, che sono regolari, e dunque rappresentano un sottoinsieme degli archimedei.

Troncare un poliedro

Si possono ottenere cinque poliedri troncati, troncando i vertici dei cinque solidi platonici.

Cosa significa troncare un solido? Per rispondere a questa domanda ci serviamo di un esempio, il tetraedro troncato, le cui facce di partenza sono triangoli. Occorre sostituire un suo vertice con un poligono che interseca gli spigoli del tetraedro che insistono sul vertice.

5.2 Classificazione

Partendo dai 5 solidi platonici, troncando opportunamente i vertici di essi, si giunge ai 5 poliedri troncati più semplici, come si può leggere di seguito.

5.2.1 Tetraedro troncato

Il tetraedro troncato si ottiene troncando opportunamente i vertici di un tetraedro.
Considerando che le 4 facce del tetraedro sono triangoli dobbiamo ricavare da esse 4 esagoni regolari.

In questo modo si creeranno 4 triangoli equilateri al posto dei vertici di partenza, come evidenziato nell'immagine seguente.

Figura 5.2: Tetraedro troncato

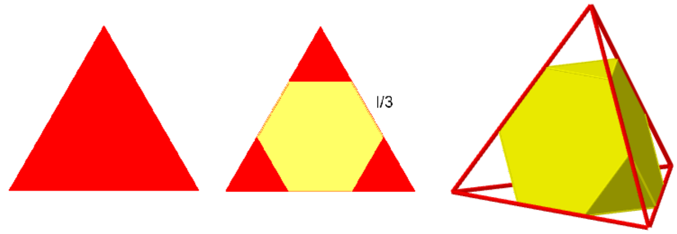


Figura 5.3: Analisi del tetraedro troncato realizzata con GeoGebra

Il nuovo ottaedro ottenuto avrà 8 facce, di cui 4 esagoni e 4 triangoli, 18 spigoli e 12 vertici, in ciascuno dei quali concorrono due esagoni e un triangolo (3,6,6).

5.2.2 Cubo troncato

In geometria solida il cubo troncato (o esaedro troncato) viene ottenuto tagliando le cuspidi del cubo, cioè i vertici di quest'ultimo.

Figura 5.4: Cubo troncato

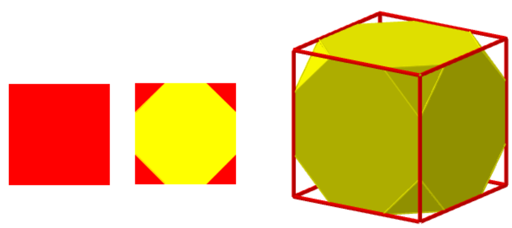


Figura 5.5: Analisi del cubo troncato realizzata con GeoGebra

Ha 14 facce regolari, di cui 6 ottagoni e 8 triangoli. Possiede 36 spigoli e 24 vertici, in ciascuno dei quali concorrono due ottagoni e un triangolo (3,8,8).

5.2.3 Ottaedro troncato

Figura 5.6: Ottaedro troncato

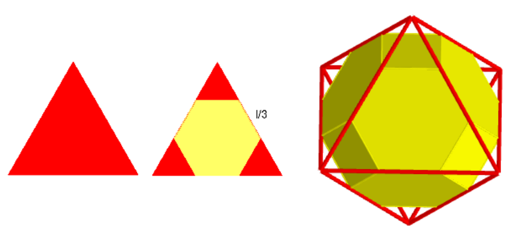


Figura 5.7: Analisi dell'ottaedro troncato realizzata con GeoGebra

L'ottaedro troncato si ottiene troncando le cuspidi dell'ottaedro regolare. Le facce dell'ottaedro sono 8 triangoli equilateri, da queste si ricavano esagoni regolari.

L'ottaedro troncato ottenuto avrà 14 facce regolari, di cui 8 sono esagoni e 6 quadrati, 36 spigoli 24 vertici, in ciascuno dei quali concorrono un quadrato e due facce esagonali (4,6,6). Lord Kelvin pensò all'ottaedro troncato quando dovette rispondere alla domanda riguardante il solido ideale con cui riempire lo spazio tridimensionale. Dopo un centinaio di anni si comprese che in realtà esisteva una struttura migliore chiamata "struttura di Weaire-Phelan": ha questa forma la piscina olimpica di Pechino.

5.2.4 Dodecaedro troncato

Il dodecaedro troncato si ottiene troncando le cuspidi del dodecaedro regolare. Le facce del dodecaedro sono 12 pentagoni equilateri, da queste si ricavano decagoni regolari.

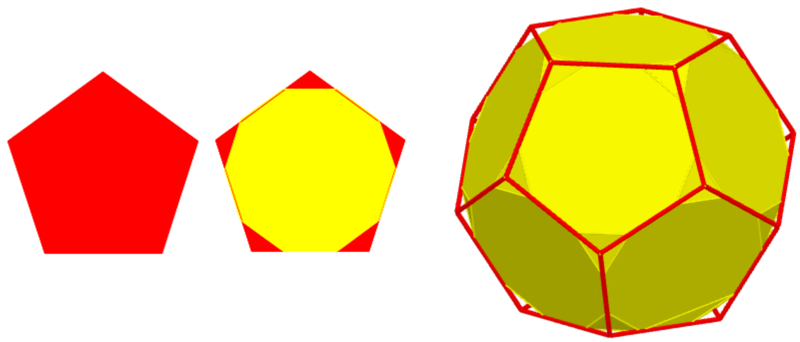


Figura 5.8: Analisi del dodecaedro troncato realizzata con GeoGebra

Il dodecaedro troncato ottenuto avrà 32 facce regolari, di cui 12 sono decagoni e 20 triangoli, 90 spigoli e 60 vertici, in ciascuno dei quali concorrono due decagoni e un triangolo (3,10,10).

5.2.5 Icosaedro troncato

L'icosaedro troncato si ottiene troncando i vertici di un icosaedro.

Le facce dell'icosaedro sono triangoli equilateri, da queste dobbiamo ricavare, come nel caso del tetraedro troncato, esagoni regolari.

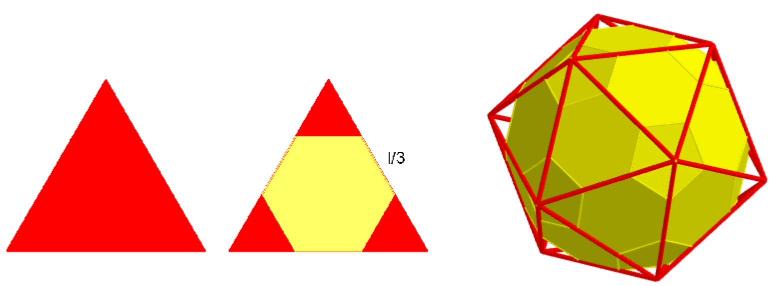


Figura 5.9: Analisi dell'icosaedro troncato realizzata con GeoGebra

L'icosaedro troncato così ottenuto avrà 32 facce, 20 esagoni e 12 pentagoni, 90 spigoli e 60 vertici, in ciascuno dei quali concorrono due esagoni e un pentagono (5,6,6).

Agli amanti del calcio farà piacere sapere che un modello di un pallone da calcio ricalca la forma dell'icosaedro troncato, questo perché il suo volume, quando "gonfiato", è quasi uguale al volume della sfera.

Inoltre anche le molecole di fullerene, costituite da atomi carbonio, hanno una forma simile all'icosaedro troncato.

5.2.6 Cubottaedro

Il cubottaedro si ottiene troncando gli otto spigoli del cubo, oppure i sei spigoli dell'ottaedro regolare.

Consideriamo il cubo di partenza, le facce sono quadrati, dobbiamo ricavare sempre 6 quadrati ma che hanno per vertici i punti medi dei lati dei quadrati di partenza.

Figura 5.10: Cubottaedro

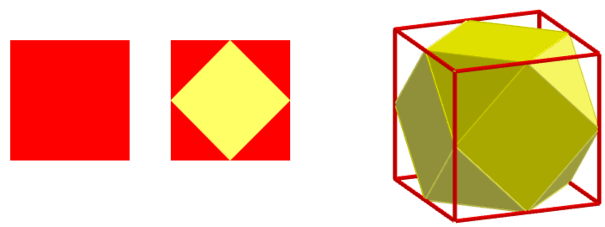


Figura 5.11: Analisi del cubottaedro realizzata con GeoGebra

Il cubottaedro così ottenuto avrà 14 facce, di cui 6 quadrati e 8 triangoli equilateri, 24 spigoli e 12 vertici, in ognuno dei quali concorrono due quadrati e due triangoli (3,4,3,4).

I 24 spigoli del cubottaedro identificano, a gruppi di sei, 4 esagoni regolari. Tagliando lungo uno di essi, il cubottaedro viene diviso in due solidi di Johnson detti cupole triangolari.

5.2.7 Icosidodecaedro

Figura 5.12: Icosidodecaedro

L'icosidodecaedro si ottiene troncando le venti cuspidi del dodecaedro, oppure le dodici cuspidi a 1/2 della lunghezza del lato dell'icosaedro.

Ha 32 facce, tra le quali troviamo 12 pentagoni e 20 triangoli. Ognuno dei 60 spigoli separa un pentagono da un triangolo e in ciascuno dei suoi 30 vertici concorrono due pentagoni e due triangoli. (3,5,3,5)

5.2.8 Rombicubottaedro

Il rombicubottaedro (o piccolo rombicubottaedro) ha 26 facce, di cui 18 quadrate e 8 triangolari. Questo poliedro ha 48 spigoli e 24 vertici, in ciascuno dei quali concorrono tre facce quadrate e una triangolare (3,4,4,4).

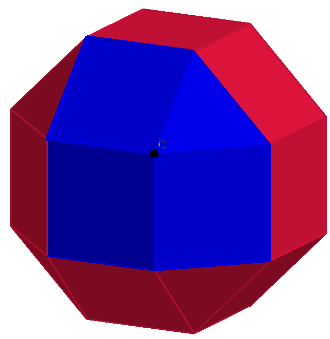


Figura 5.13: Rombicubottaedro

Il rombicubottedro può essere ottenuto per espansione, ovvero per allontanamento delle facce di un solido dal suo centro, del cubo o dell'ottaedro.

Un altro modo per ottenere il rombicubottedro a partire dal cubo o dall'ottaedro è quello di troncare al contempo tanto le cuspidi quanto gli spigoli del solido di partenza.

5.2.9 Cubottaedro troncato

Il cubottaedro troncato ha 98 facce di cui 12 quadrati, 8 esagoni regolari ed infine 6 ottagoni regolari.

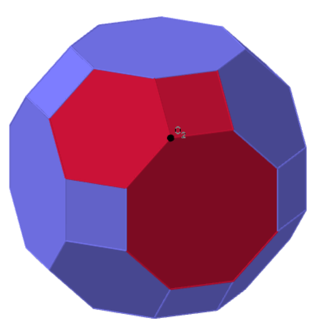


Figura 5.14: Cubottaedro troncato

Come tutti i poliedri archimedei, il cubottaedro troncato è omogeneo nei vertici. Di conseguenza, i 48 vertici hanno tutti la stessa valenza (cioè lo stesso numero di facce che concorrono nel vertice, e che in questo caso è 3), e più generalmente la stessa cuspide. Ogni vertice ospita un esagono, un quadrato e un ottagono. Gli spigoli sono 72, tutti della stessa lunghezza.

5.2.10 Rombicosidodecaedro

Il rombicosidodecaedro è un poliedro composto da 62 facce, di cui 12 pentagoni, 30 quadrati, 20 triangoli, 120 spigoli e 60 vertici, in ciascuno dei quali concorrono un pentagono, due quadrati e un triangolo (3,4,4,5).

Figura 5.15: Rombicosidodecaedro

5.2.11 Icosidodecaedro troncato

L'icosidodecaedro troncato si ottiene troncando le cuspidi dell'icosidodecaedro regolare. Le facce dell'icosidodecaedro sono 32, dalle quali si ricavano decagoni regolari.

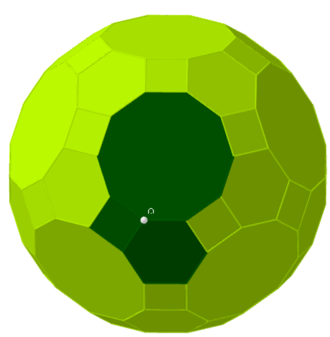


Figura 5.16: Icosidodecaedro troncato

L'icosidodecaedro troncato ottenuto avrà 62 facce, di cui 12 decagoni, 20 esagoni e 30 quadrati, 180 spigoli, 120 vertici, in ciascuno dei quali concorrono un decagono, un esagono ed un quadrato (4,6,10).

L'icosidodecaedro troncato è più propriamente un icosidodecaedro rombitroncato, poiché troncando le 30 cuspidi dell'icosidodecaedro, si otterrebbero delle facce rettangolari.

5.2.12 Cubo camuso

In geometria solida il cubo simo (il termine indica un cubo al quale sono stati smussati alcuni vertici), anche detto cubo camuso, ha 38 facce, delle quali 6 sono quadrati e 32 sono triangoli equilateri, 60 spigoli e 24 vertici, in ognuno dei quali concorrono un quadrato e quattro triangoli.

Si tratta di un poliedro chirale. Un oggetto si dice chirale quando è diverso dalla sua immagine riflessa, ovvero quando non è possibile sovrapporre l'immagine con l'oggetto tramite rotazioni o traslazioni.

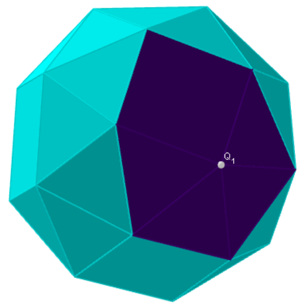


Figura 5.17: Cubo camuso

5.2.13 Dodecaedro camuso

Il dodecaedro simo, a cui sono stati smussati alcuni vertici, detto anche dodecaedro camuso è composto da 92 facce, di cui 12 sono pentagoni regolari e le altre 80 sono triangoli equilateri (3,3,3,3,5). È anch'esso un poliedro chirale.

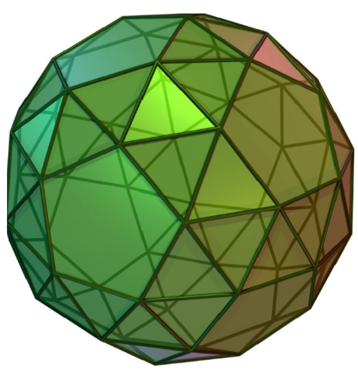


Figura 5.18: Dodecaedro camuso (fonte: `www.wikipedia.org`)

5.3 Incidenza dei vertici

Definizione 5.3.1 L'incidenza dei vertici è la sequenza dei numeri dei poligoni regolari che incidono in ogni vertice.

Se, per esempio, consideriamo un rombicubottaedro l'incidenza corrispondente è (3,4,4,4). Intorno ad ogni vertice troviamo un triangolo e tre quadrati, come si vede nell'immagine 5.13.

5.3.1 Incidenza dei vertici dei poliedri archimedei

Ricapitoliamo l'incidenza dei vertici dei poliedri studiati nella tabella 5.1.

Solido	**Incidenza dei vertici**
Cubo troncato	3,8,8
Tetraedro troncato	3,6,6
Ottaedro troncato	4,6,6
Dodecaedro troncato	3,10,10
Icosaedro troncato	5,6,6
Cubottaedro	3,4,3,4
Icosidodecaedro	3,5,3,5
Rombicubottaedro	3,4,4,4
Cubottaedro troncato	4,6,8
Rombicosidodecaedro	3,4,4,5
Icosidodecaedro troncato	4,6,10
Cubo camuso	3,3,3,3,4
Dodecaedro camuso	3,3,3,3,5

Tabella 5.1: Incidenza dei vertici nei solidi di Archimede

Il numero dei lati dei poligoni regolari ha un ordine ben preciso, infatti cambiando l'ordine dei poligoni intorno ad un vertice non è detto che si possa avere lo stesso poliedro. Un esempio notevole è quello del cubottaedro e del rombicubottaerdo. Come si può infatti vedere dalla tabella **??**, entrambi hanno attorno ad un vertice due quadrati e due triangoli equilateri, quindi le figure della bandiera sono le stesse. Eppure le bandiere che si ottengono nei due casi sono molto diverse e generano due solidi differenti.

Sono importanti anche le tipologie di poligono, poiché la somma degli angoli adiacenti deve essere minore di 360° (come già anticipato nel paragrafo 3.3): se ciò non viene rispettato non si avrà nessuna figura solida. Per esempio una bandiera (4,4,4,4) formata da 4 quadrati non potrà mai formare un solido perché si forma un angolo giro.

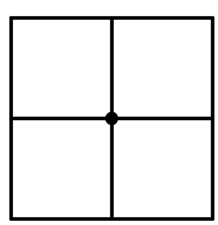


Figura 5.19: Una bandiera formata da quattro quadrati non potrà essere parte di un solido

5.4 Poliedro di Miller

Il poliedro di Miller ha una particolarità che lo differenzia da tutti i poliedri archimedei: anche se ha un'incidenza dei vertici pari a (3,4,4,4), **non è considerato un poliedro archimedeo** dato che non è un poliedro uniforme relativamente ai vertici: si dice anche che il poliedro non è transitivo sui vertici, ovvero esso non è sovrapponibile a sé, se ruotato.

Il poliedro di Miller non è un poliedro V-regolare, tuttavia ha la stessa bandiera di un poliedro archimedeo, il quale è semi-regolare e ha vertici omogenei: ecco un esempio di come bandiere uguali possano dare origine a poliedri diversi, l'uno con una certa regolarità (il caso dei poliedri di Archimede), l'altro senza (il poliedro di Miller).

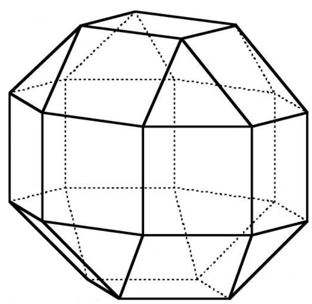
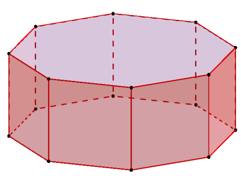
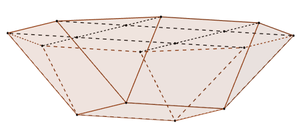


Figura 5.20: Poliedro di Miller (fonte: `http://www.matematita.it`)

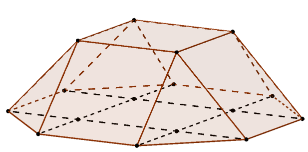
Il poliedro di Miller può essere suddiviso in tre parti, come mostra l'analisi eseguita di seguito.



La parte centrale del solido è costituita da un prisma a base ottagonale con quadrati come poligoni laterali.



La parte inferiore del solido è costituita da una piramide formata in modo alternato da quadrati e triangoli equilateri che si vanno a unire formando un quadrato come base inferiore.



La parte superiore del solido è uguale a quella inferiore: l'unica differenza, oltre al fatto che è rovesciata, è che viene ruotata di 40° rispetto alla parte inferiore, in modo tale che, dove sotto è presente un quadrato, sopra è presente un triangolo.

L'esempio del poliedro di Miller è importante per mostrare come incidenza dei vertici, uguaglianza delle figure al vertice, uguaglianza delle bandiere attorno ad ogni vertice **non siano condizioni sufficienti** per determinare un singolo e univoco poliedro.

Potrebbe essere utile confrontare il poliedro di Miller con il rombicubottaedro (che hanno la stessa bandiera) per mostrare le diversità fra i due. Ad esempio, nella figura 5.21 si vede come a partire dalla stessa cupola e dallo stesso prisma, ma ruotati e uniti in modi differenti, si ottenga una volta il poliedro di Miller (sotto), una volta il rombicubottaedro (sopra).

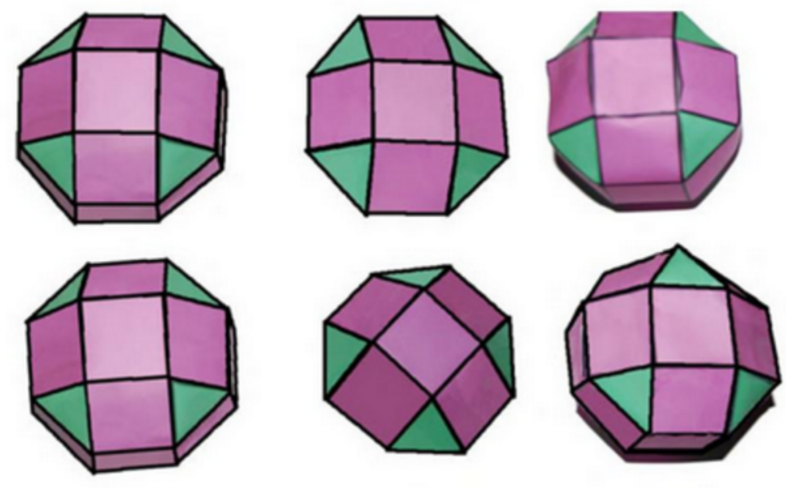


Figura 5.21: Costruzione del poliedro di Miller e del rombicubottaedro (fonte: Audun Holme, *Geometry: Our Cultural Heritage*)

6. Bipiramidi e trapezoedri

In questa prima parte della scheda sono presentati prettamente i contenuti teorici degli argomenti trattati, con relative definizioni e spiegazioni riguardanti i solidi presi in esame.

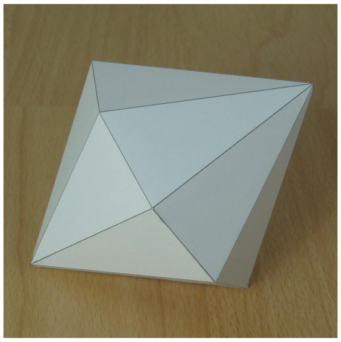
I solidi presi in esame sono bipiramidi e trapezoedri con figure al vertice regolari. Di questi verranno studiate le principali caratteristiche, le rispettive simmetrie e le particolarità.

6.1 Bipiramidi

Definizione 6.1.1 Una bipiramide è un solido formato di due piramidi opposte aventi la base in comune.

Le bipiramidi sono poliedri costituiti da due piramidi simmetriche rispetto alla base che poggiano su un poligono. Essi costituiscono una famiglia infinita di solidi.

Se la base è un poligono regolare tutte le facce del poligono risultano uguali e simmetriche rispetto al piano della base e al punto centrale.



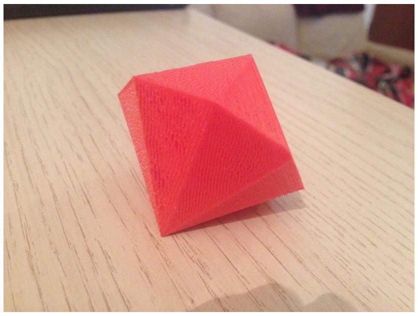


Figura 6.1: Esempi di bipiramidi

6.2 Trapezoedri

Definizione 6.2.1 Un trapezoedro è solido geometrico avente come facce aquiloni convessi congruenti (ovvero, deltoidi). Per questa ragione essi sono anche chiamati *deltoedri*.

I trapezoedri sono poliedri che hanno tutte le **facce uguali tra loro**. In questo caso tutte le figure al vertice sono regolari. Essi costituiscono una **famiglia infinita** di solidi.

Il loro elemento distintivo riguarda la simmetria che si può applicare al loro interno. Il gruppo di simmetria (insieme di tutte le isometrie del piano che mandano la figura in sé stessa) è transitivo sulle facce: scelte due facce esiste sempre una simmetria nel poliedro che manda una nell'altra.

Più semplicemente un trapezoedro può essere considerato simile a una bipiramide (un altro nome con cui sono conosciuti questi solidi è *antibipiramidi*) avente come facce dei deltoidi, anziché triangoli. Un esempio è il trapezoedro tetragonale con quattro facce superiori e quattro facce inferiori.

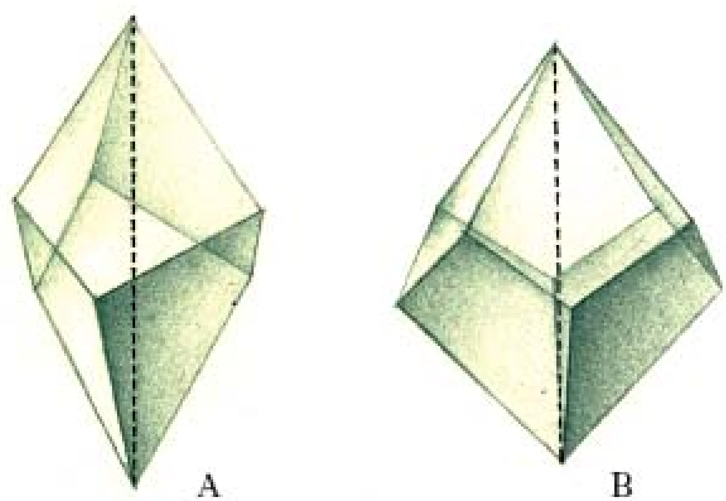


Figura 6.2: Esempi di trapezoedri (fonte: `www.treccani.it`)

6.3 A proposito di "regolarità"

Nelle bipiramidi, dato che le figure al vertice nel caso delle due "punte" sono sempre poligoni regolari e che le figure al vertice degli altri vertici sono sempre rombi, si può scegliere l'altezza in modo che tutte le figure al vertice siano poligoni regolari e inoltre le facce tutte uguali.

Analogamente, possiamo considerare trapezoedri in cui l'altezza è tale da avere tutte le figure al vertice regolari: tuttavia nel caso dei trapezoedri le figure al vertice che corrispondono a rombi (o quadrati) nelle bipiramidi sono triangoli isosceli (o triangoli equilateri).

7. Poliedri di Catalan

Definizione 7.0.1 I poliedri di Catalan, anche detti duali dei poliedri di Archimede, fanno parte della categoria dei poliedri semiregolari.

Si definisce poliedro duale il poliedro avente per spigoli i segmenti congiungenti centri di facce adiacenti di un altro poliedro, di cui sarà detto duale. Per ciascuno dei solidi archimedei è possibile definire un poliedro duale, tanto che, essendo 13 i solidi archimedei, 13 saranno i loro duali, ovvero i poliedri di Catalan. Questi solidi vengono ricordati con il nome del matematico francese Eugène Charles Catalan, che li descrisse nel 1865 nella sua opera *Mémoire sur la Théorie des Polyèdres*.

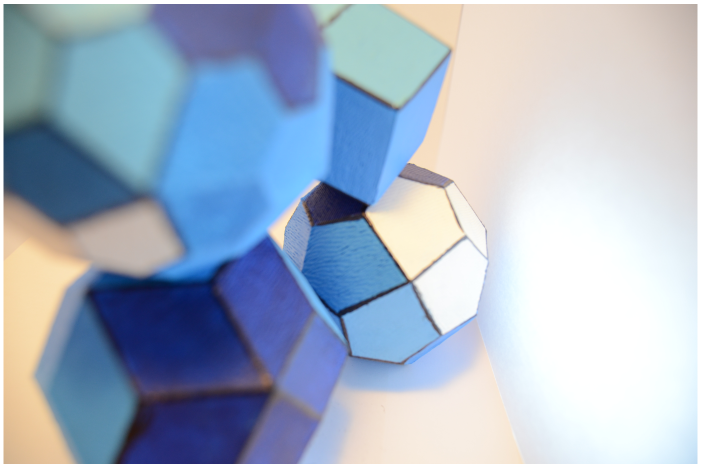


Figura 7.1: Solidi di Catalan realizzati con la stampante 3D

Dato che i solidi archimedei hanno vertici uniformi e facce diverse fra loro, e la dualità inverte i ruoli di vertici e facce, quelli di Catalan hanno facce uniformi e vertici aventi cuspidi (poliedri) differenti (per *cuspidi* si veda il paragrafo 5.1). Le facce dei solidi di Catalan sono uniformi, ma non sono poligoni regolari; tuttavia le cuspidi ai vertici sono regolari e presentano angoli diedri uguali.

7.1 Analisi dei poliedri di Catalan

7.1.1 Triacistetraedro

Il solido è il duale del tetraedro troncato. Ha 12 facce, 18 spigoli e 8 vertici. La valenza dei suoi vertici è 3 o 6 e, di conseguenza, le figure al vertice sono triangoli equilateri e esagoni regolari. È l'unico solido di Catalan a presentare il gruppo di simmetria del tetraedro (T_d).

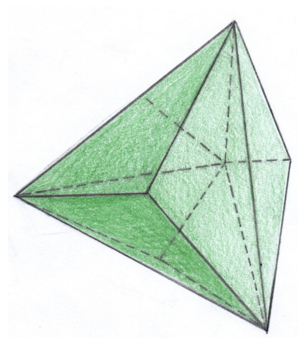


Figura 7.2: Triacistetraedro

7.1.2 Dodecaedro rombico

Si tratta di un solido particolare perché è uno dei due unici poliedri di Catalan ad avere facce equilatere e circoscrivibili e figure al vertice equiangole e inscrivibili: infatti, le facce sono costituite da rombi (con tutti i lati congruenti e, essendo parallelogrammi, circoscrivibili ad una circonferenza), mentre le figure al vertice, in quanto triangoli equilateri o quadrati, sono equiangole e inscrivibili in una circonferenza (la valenza dei vertici risulta talvolta 3, talvolta 4). Il poliedro presenta una regolarità: tra le diagonali di ciascuna faccia sussiste lo stesso rapporto che vi è tra la diagonale e il alto di un quadrato, ovvero $\sqrt{2}$. Tale poliedro possiede 12 facce, 24 spigoli e 14 vertici e appartiene al gruppo di simmetria dell'ottaedro e del cubo (O_h).

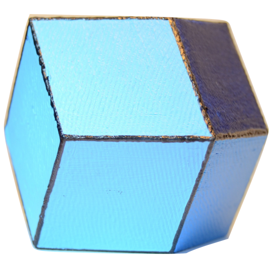
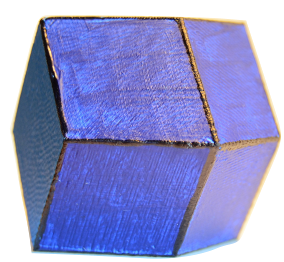


Figura 7.3: Bandiere del dodecaedro rombico



7.1.3 Triacisottaedro

Il solido è il duale del cubo troncato. Possiede 24 facce, 36 spigoli e 14 vertici. La valenza dei vertici è alternativamente 3 o 8; le figure al vertice sono triangoli equilateri o ottagoni regolari. Appartiene al gruppo di simmetria dell'ottaedro e del cubo (O_h).

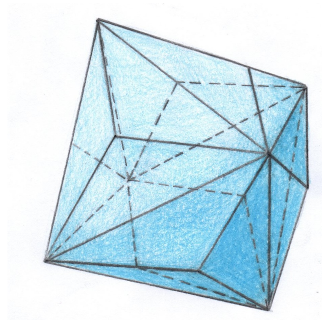


Figura 7.4: Triacisottaedro

7.1.4 Tetracisesaedro

Il solido è il duale del ottaedro troncato: è composto da 24 facce, 36 spigoli e 14 vertici. Si tratta di un poliedro non regolare, le cui facce sono tutte triangoli equilateri aventi la base pari a $\frac{4}{3}$ dei lati uguali. La valenza dei vertici è alternativamente 4 o 6; le figure al vertice sono quadrati o esagoni regolari. Appartiene al gruppo di simmetria dell'ottaedro e del cubo (O_h).

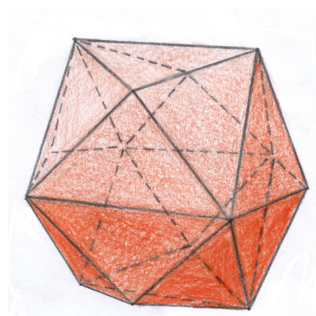


Figura 7.5: Tetracisesaedro

7.1.5 Icositetraedro trapezoidale

Il solido è il duale del rombicubottaedro. Ha 24 facce, 48 spigoli e 26 vertici. La valenza dei suoi vertici è 3 o 4 e, di conseguenza, le figure al vertice sono triangoli equilateri e quadrati. Appartiene al gruppo di simmetria dell'ottaedro e del cubo (O_h).

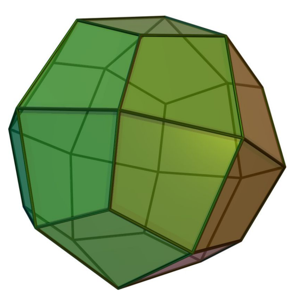


Figura 7.6: Icositetraedro trapezoidale (fonte: `www.wikipedia.org`)

7.1.6 Esacisottaedro

Questo solido è il duale del cubottaedro troncato. Ha 48 facce che sono esclusivamente triangoli scaleni, 72 spigoli e 26 vertici i quali possono avere valenza 4 (in questo caso le figure al vertice sono rombi) oppure valenza 6 (in questo caso si ha come figure al vertice esagoni irregolari). In questo caso il gruppo di simmetria è quello dell'ottaedro e del cubo (O_h).

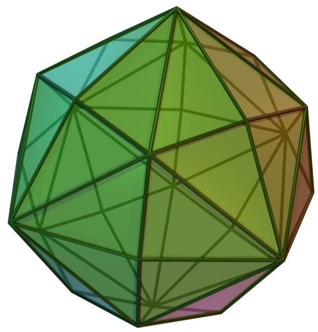


Figura 7.7: Esacisottaedro (fonte: `www.wikipedia.org`)

7.1.7 Icositetraedro pentagonale

L'icositetraedro pentagonale, il cui corrispondente solido archimedeo è il cubo camuso, è composto da 24 pentagoni irregolari che formano 60 spigoli e 38 vertici di valenza 3 o 4: nel primo caso le figure al vertice sono triangoli isosceli, nel secondo caso quadrati. Appartiene al gruppo di simmetria dell'ottaedro e del cubo (O).

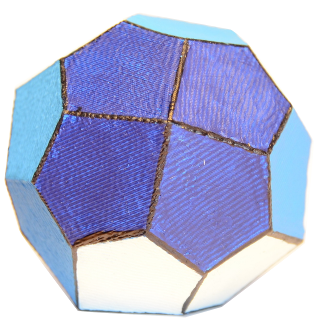
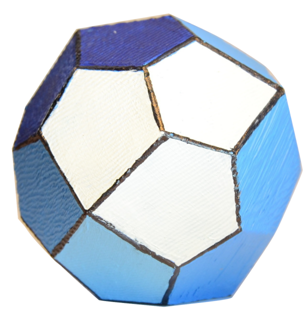


Figura 7.8: Bandiere dell'icositetraedro pentagonale



7.1.8 Triacontaedro rombico

Si tratta dell'altro poliedro che presenta facce equilatere e circoscrivibili e figure al vertice equiangole e inscrivibili: infatti le facce sono costituite da rombi, mentre le figure al vertice sono triangoli equilateri e pentagoni regolari (dunque i vertici hanno valenza 3 o 5). Il solido presenta una regolarità notevole: il rapporto tra le diagonali di ciascuna faccia (rombo) è pari alla sezione aurea $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (si veda il paragrafo 3.5). Il triacontaedro rombico ha 30 facce, 60 spigoli e 32 vertici e appartiene al gruppo di simmetria dell'icosaedro (I_h).

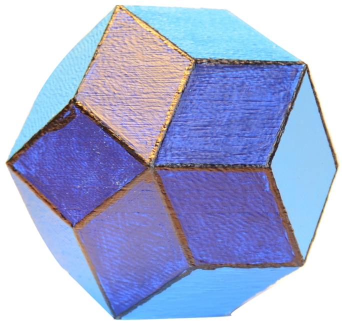
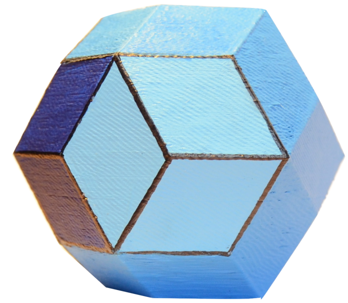


Figura 7.9: Bandiere del triacontaedro rombico



7.1.9 Triacisicosaedro

Si tratta del duale del dodecaedro troncato. Composto da 60 facce, 90 spigoli e 32 vertici, è un poliedro non regolare. La valenza dei vertici è alternativamente 3 o 10: perciò le figure al vertice sono triangoli equilateri o decagoni regolari. Le facce sono tutte triangoli equilateri. Appartiene al gruppo di simmetria del dodecaedro e dell'icosaedro (I_h).

7.1.10 Pentacisdodecaedro

Il corrispondente duale del pentacisdodecaedro è l'icosaedro troncato. Possiede 60 facce uguali (formate da triangoli isosceli), 90 spigoli e 32 vertici. Quest'ultimi hanno una valenza di 5 o 6, formando così pentagoni ed esagoni regolari. Appartiene al gruppo di simmetria dell'icosaedro e del dodecaedro (I_h).

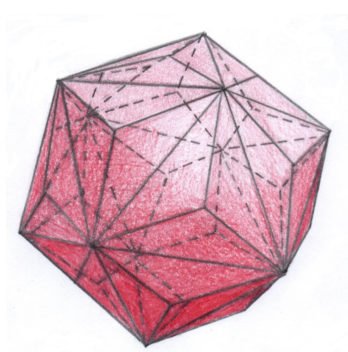


Figura 7.10: Triacisicosaedro

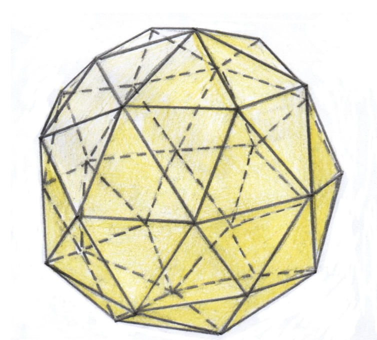


Figura 7.11: Pentacisdodecaedro

7.1.11 Esacontaedro trapezoidale

L'esacontaedro trapezoidale è il duale del rombicosidodecaedro: ha 60 facce, 120 spigoli e 62 vertici, mentre la valenza dei vertici può essere 3, 4 o 5. Il solido ha per facce quadrilateri irregolari detti aquiloni. Le figure al vertice sono triangoli equilateri per i vertici con valenza 3, quadrati per quelli con valenza 4 e pentagoni per quelli con valenza 5. Anche per questo solido il gruppo di simmetria è quello dell'icosaedro (I_h).

7.1.12 Esacisicosaedro

Il corrispondente solido archimedeo è l'icosidodecaedro troncato. Ha 120 facce, 180 spigoli e 60 vertici, mentre la valenza dei vertici può essere 4, 6 o 10 in quanto è composto esclusivamente da triangoli scaleni. Per i vertici che hanno valenza 4 la corrispondente figura al vertice è il rombo; per i vertici che hanno valenza 6 si ottiene un esagono irregolare; per i restanti vertici che hanno valenza 10 si ha un decagono. Il gruppo delle simmetrie è il gruppo icosaedrale (I_h), lo stesso gruppo dell'icosaedro, del dodecaedro e dell'icosidodecaedro troncato.

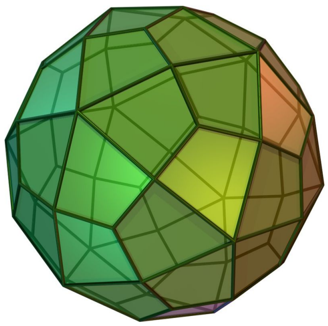


Figura 7.12: Esacontaedro trapezoidale (fonte: `www.wikipedia.org`)

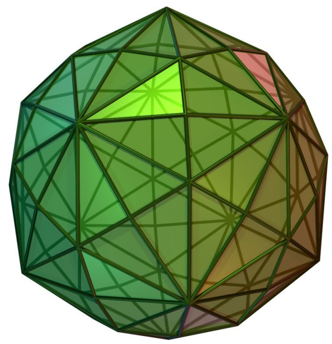


Figura 7.13: Esacisicosaedro (fonte: `www.wikipedia.org`)

7.1.13 Esacontaedro pentagonale

L'esacontaedro pentagonale è il duale del dodecaedro camuso: è composto da 60 facce, 150 spigoli e 92 vertici. Le facce sono pentagoni irregolari, mentre i vertici, che possono avere valenza 3 o 5, hanno come figure al vertice rispettivamente un triangolo isoscele e un pentagono regolare. Il gruppo di simmetria è quello dell'ottaedro e del cubo (O).

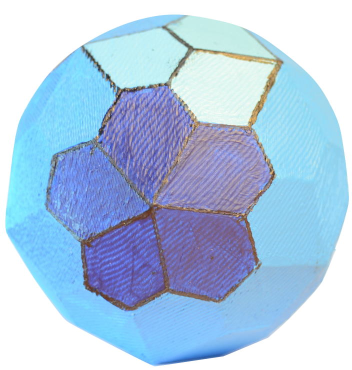
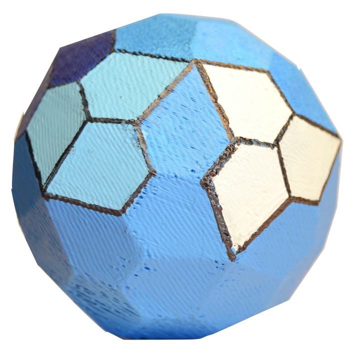


Figura 7.14: Bandiere del esacontaedro pentagonale



7.2 Tabella riassuntiva

Proponiamo qui di seguito una tabella riassuntiva di tutti i solidi (tabella 7.1), ordinati per complessità del gruppo di simmetria, che sono stati illustrati.

Solido di Catalan	**Solido archimedeo**	**F**	**S**	**V**	**Faccia**	**Gr.**
triacistetraedro	tetraedro troncato	12	18	8	tr. isoscele	T_d
dodecaedro rombico	cubottaedro	12	24	14	rombo	O_h
triacisottaedro	cubo troncato	24	36	14	tr. isoscele	O_h
tetracisesaedro	ottaedro troncato	24	36	14	tr. isoscele	O_h
icositetraedro trapezoidale	rombicubottaedro	24	48	26	aquilone	O_h
esacisottaedro	cubottaedro troncato	48	72	26	tr. scaleno	O_h
icositetraedro pentagonale	cubo camuso	24	60	38	pent. irregolare	O
triacontaedro rombico	icosidodecaedro	30	60	32	rombo	I_h
triacisicosaedro	dodecaedro troncato	60	90	32	tr. isoscele	I_h
pentacisdodecaedro	icosaedro troncato	60	90	32	tr. isoscele	I_h
esacontaedro trapezoidale	rombicosidodecaedro	60	120	62	aquilone	I_h
esacisicosaedro	icosidodecaedro troncato	120	180	62	tr. scaleno	I_h
esacontaedro pentagonale	dodecaedro camuso	60	150	92	pent. irregolare	I

Tabella 7.1: Tabella riassuntiva dei poliedri di Catalan

8. Deltaedri

Definizione 8.0.1 I deltaedri sono poliedri le cui facce sono tutte triangoli equilateri.

I deltaedri formano un insieme infinito di poliedri. Fra questi, solo otto sono poliedri strettamente convessi, ovvero i solidi nei quali per ogni coppia di punti del solido, il segmento che li unisce è contenuto interamente nel solido. Di seguito saranno riportati i deltaedri che appartengono a quest'ultima categoria.

8.1 Tetraedro regolare

Il tetraedro regolare appartiene al gruppo dei solidi platonici, si può chiamare anche *simplesso tridimensionale* poiché è il solido con il minore numero di vertici, così come il triangolo è il simplesso bidimensionale perché non esistono figure piane (cioè non interamente contenute in una linea retta) che abbiano meno di tre lati. Il tetraedro è composto da quattro facce triangolari e quindi è un solido convesso.

Costruzione Il tetraedro, essendo il solido con il minor numero di vertici, non può essere costituito da più solidi (formati con i vertici del tetraedro stesso) uniti tra loro.

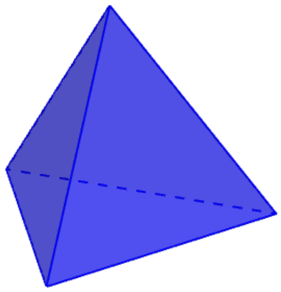


Figura 8.1: Tetraedro regolare

8.2 Dipiramide triangolare

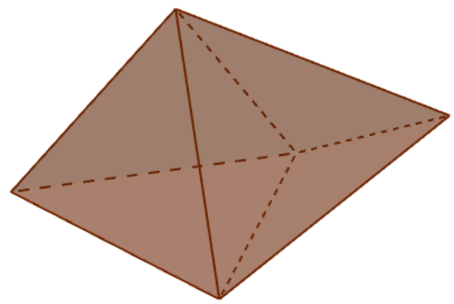
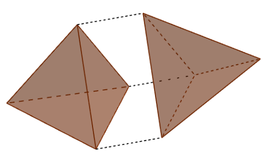


Figura 8.2: Dipiramide triangolare

La dipiramide triangolare è un tipo di esaedro. Come suggerisce il nome, essa può essere costruita unendo due tetraedri lungo una faccia. Anche se tutte le sue facce sono congruenti, non è un solido platonico perché in alcuni vertici incidono tre facce, in altri quattro. La dipiramide triangolare è uno dei solidi di Johnson ed è formata da 9 spigoli e 5 vertici.

Costruzione



La dipiramide triangolare, come si può notare dal nome, è costituita da due tetraedri aventi una faccia in comune.

8.3 Ottaedro regolare

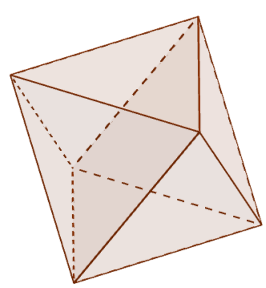
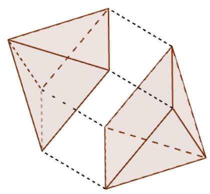


Figura 8.3: Ottaedro regolare

L'ottaedro è un poliedro con otto facce triangolari. L'ottaedro regolare è uno dei cinque solidi platonici le cui facce sono triangoli equilateri.
Esso è un solido convesso con 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli e ogni suo angolo diedrale misura circa 109.47°.

Come tutti i solidi platonici, un ottaedro regolare si può sia inscrivere che circoscrivere a sfere, i cui centri coincidono e sono il centro di simmetria per l'ottaedro.

Costruzione



L'ottaedro, proprio come la dipiramide triangolare, è formato da due piramidi con la base in comune, solo che in questo caso le due piramidi sono a base quadrata.

8.4 Dipiramide pentagonale

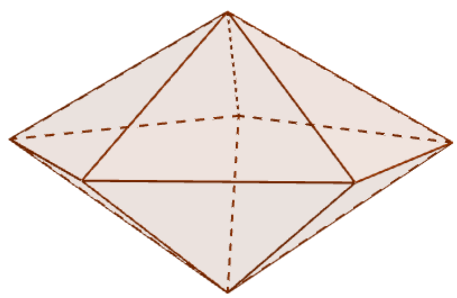
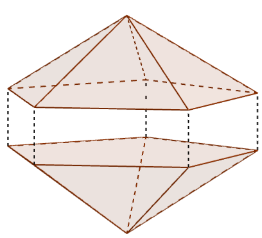


Figura 8.4: Dipiramide pentagonale

La dipiramide pentagonale è un solido formato da due piramidi poggianti sulla stessa base pentagonale. Se le facce sono triangoli equilateri, essa è un deltaedro e un solido di Johnson.

Costruzione



La dipiramide pentagonale, come per i precedenti solidi, è formata da due piramidi con la base in comune ed in questo caso la base in comune è un pentagono.

8.5 Disfenoide camuso

Il disfenoide camuso è uno dei solidi di Johnson e, dato che ha come facce dei triangoli equilateri, è considerato un deltaedro. Non è un poliedro regolare perché in alcuni vertici incidono 4 facce e in altri ne incidono 5. Il disfenoide è composto da 8 vertici e 18 spigoli.

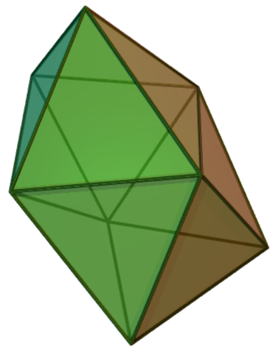


Figura 8.5: Disfenoide camuso (fonte: `www.wikipedia.org`)

8.6 Prisma triangolare triaumentato

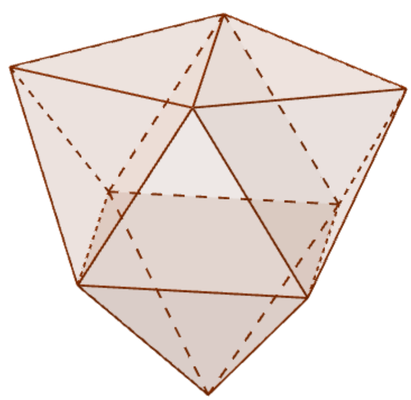
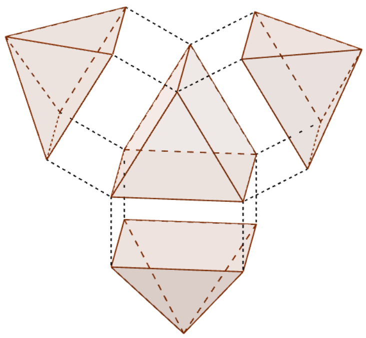


Figura 8.6: Prisma triangolare triaumentato

Come suggerisce il nome, il solido può essere costruito unendo una piramide a base quadrata a ciascuna delle tre facce equatoriali del prisma triangolare. È anche un solido di Johnson.

Costruzione



Questo solido è costituito da tre piramidi a base quadrata unite tra loro tramite un prisma triangolare.

8.7 Dipiramide quadrata giroelongata

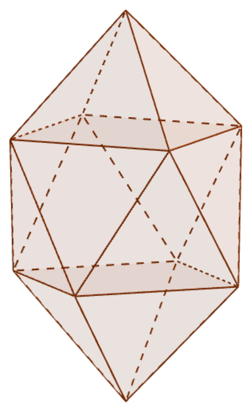
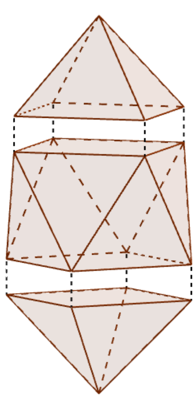


Figura 8.7: Dipiramide quadrata giroelongata

La dipiramide quadrata giroelongata può essere costruita *giroelongando* un ottaedro con l'inserimento di un antiprisma a base quadrata tra le sue due metà congruenti.

Costruzione



Questo solido è costituito da due piramidi a base quadrata unite tra di loro da un antiprisma a base quadrata, in modo tale che le due piramidi tra di loro siano ruotate di 45°

8.8 Icosaedro regolare

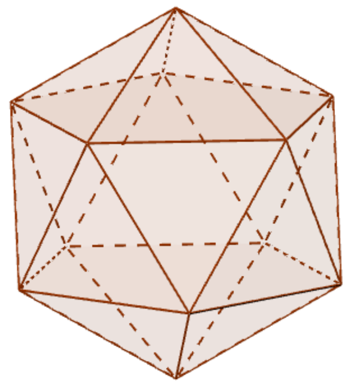
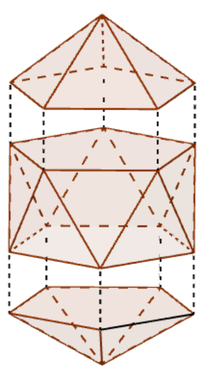


Figura 8.8: Icosaedro regolare

In geometria l'icosaedro è un qualsiasi poliedro con venti facce, di solito però con questo termine si indica l'icosaedro regolare che ha come facce dei triangoli equilateri. L'icosaedro è un solido platonico formato da 12 vertici e 30 spigoli. L'icosaedro possiede 120 simmetrie di cui 60 sono rotazioni e le altre invertono l'orientazione nello spazio.

Costruzione



L'icosaedro regolare si differenzia dalla dipiramide quadrata giroelongata, proprio come l'ottaedro regolare si differenzia dalla dipiramide pentagonale, poiché in tal caso agli estremi sono presenti piramidi a base pentagonale collegate tra loro da un antiprisma a base pentagonale.

9. Poliedri di Johnson

Definizione 9.0.1 Un solido di Johnson è un solido convesso costituito da poligoni regolari, che non appartiene né alla categoria dei solidi platonici, né a quella dei solidi archemedei, né ai prismi o agli antiprismi.

Ne esistono in totale 92 e si suddividono in:

- piramidi, cupole e rotunda;
- piramidi modificate;
- cupole e rotunde modificate;
- prismi aumentati;
- solidi platonici modificati;
- solidi di Archimede modificati;
- misti.

9.1 Facce

I poligoni regolari che costituiscono le facce dei solidi di Johnson hanno 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lati e sono tutti regolari, ma non uguali tra loro.

9.2 Tipologie dei solidi di Johnson

9.2.1 Piramidi

Le piramidi nella classificazione di Johnson occupano le prime due posizioni, la prima a base quadrata, la seconda a base pentagonale; i triangoli che escono dai lati della base ad arrivare al vertice sono equilateri.

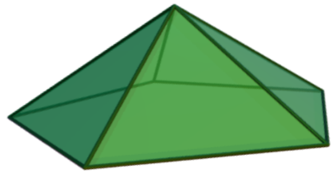


Figura 9.1: Piramide pentagonale (fonte: `www.wikipedia.org`)

9.2.2 Cupole

Una cupola è un prismatoide, la famiglia di poliedri che comprende anche prismi e piramidi. I vertici di una cupola giacciono infatti in due piani paralleli. Nei solidi Johnson sono costituite da poligoni regolari: appartengono a questa tipologia quelle a base triangolare, quadrata e pentagonale. Le pareti laterali (che sono inclinate rispetto alla base) sono quadrati alternati a triangoli equilateri.

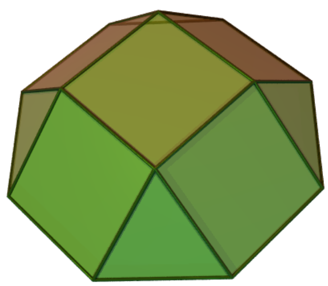


Figura 9.2: Cupola quadrata (fonte: `www.wikipedia.org`)

9.2.3 Rotunde

Una rotunda è un membro della famiglia dei poliedri a simmetria diedrale: essi sono simili alle cupole, ma invece di quadrati e triangoli alternati, in essi si alternano pentagoni e triangoli attorno all'asse di simmetria. Se è pentagonale, la rotunda è un solido di Johnson (cf. Viktor A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, 1969).

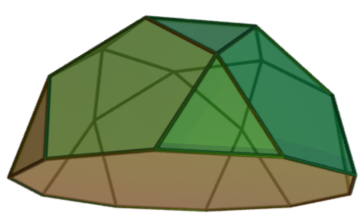


Figura 9.3: Rotunda pentagonale (fonte: `www.wikipedia.org`)

Al fine di mostrare come si crea la curvatura della rotunda, abbiamo costruito uno spaccato del solido: esso illustra come i due lati adiacenti del pentagono si congiungano a una coppia di triangoli sovrapposti, e così via, fino al completamento della cupola.

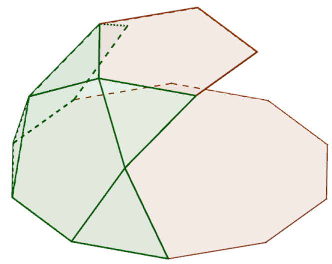


Figura 9.4: Spaccato di una rotunda pentagonale

9.2.4 Piramidi, cupole e rotunde modificate

Questa categoria di solidi di Johnson si estende dal settimo al quarantottesimo solido nella classificazione stilata da Johnson: si tratta di modificazioni dei solidi elencati precedentemente e il nome di questi poliedri è caratterizzato dagli aggettivi *elongato* e *giroelongato*.

- *Elongato* significa che il solido è stato aumentato il solido attaccando un prisma.
- *giroelongato* indica il fatto che il solido è stato aumentato con l'aggiunta di un antiprisma.

In alcuni casi sono posti anche prefissi particolari come:

- *bi-*: esso significa che vengono unite in corrispondenza delle basi due copie del solido che segue il prefisso;
- *orto-* e *giro-*: indicano l'aggiunta di cupole e rotunde unite rispettivamente tramite facce simili (si usa il prefisso *orto-*) o facce dissimili (si usa il prefisso *giro-*).

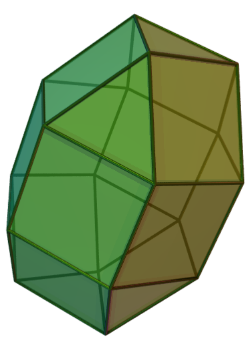


Figura 9.5: Girobicupola triangolare elongata (fonte: `www.wikipedia.org`)

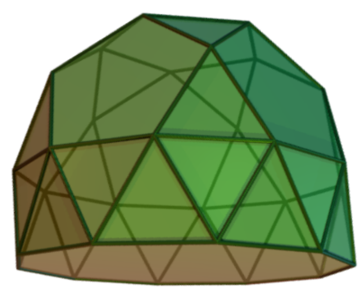


Figura 9.6: Rotunda pentagonale giroelongata (fonte: `www.wikipedia.org`)

9.2.5 Prismi aumentati

Questa categoria di solidi di Johnson va dal quarantanovesimo solido fino ad arrivare al cinquantasettesimo. Nei prismi a base triangolare, pentagonale e esagonale Johnson effettua delle aggiunte di piramidi; il nome di questi solidi può essere preceduto da un prefisso che ne specifica il numero di aggiunte.

9.2.6 Solidi platonici modificati

In questa categoria di solidi, come nel caso dei prismi aumentati vengono modificati solidi:

- se è presente il termine *"aumentato"* significa che una piramide o una cupola è stata aggiunta a una faccia del solido in questione;
- se è presente il termine *"diminuito"* significa che dal solido richiamato è stata rimossa una piramide o una cupola.

Anche in questa categoria sono usati dei prefissi per specificare il numero aumenti o diminuzioni.

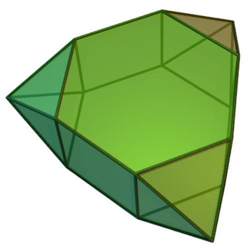


Figura 9.7: Prisma esagonale triaumentato (fonte: `www.wikipedia.org`)

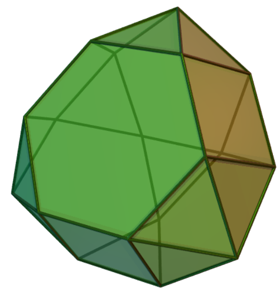


Figura 9.8: Dodecaedro parabiaumentato (fonte: `www.wikipedia.org`)

9.2.7 Solidi archimedei modificati

In questa categoria i solidi, come nei due casi precedenti, vengono modificati rispettando le stesse proprietà del nome (*"aumentato"* o *"diminuito"*), ma in alcuni casi viene aggiunto l'aggettivo girato il quale significa che una cupola posta sul solido in questione è stata ruotata in modo che vengano a coincidere coppie di spigoli prima distinti, come per la differenza tra ortobicupole e girobicupole.

9.2.8 Solidi misti

I solidi misti sono gli ultimi 9 solidi di Johnson e sono: il disfenoide camuso (si veda il paragrafo 8.5), l'antiprisma quadrato camuso, la sfenocorona, la sfenocorona aumentata, la sfenomegacorona, l'ebesfenomegacorona, il disfenocingolo, la bilunabirotunda e l'ebesfenorotunda triangolare.

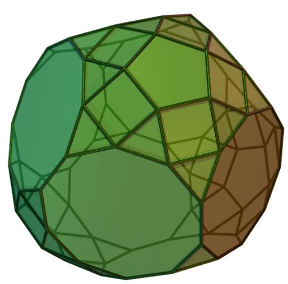


Figura 9.9: Dodecaedro troncato triaumentato (fonte: `www.wikipedia.org`)

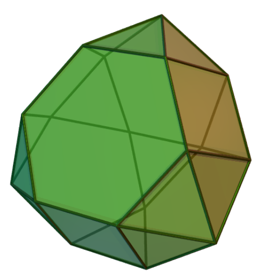


Figura 9.10: Ebesfenorotunda triangolare (fonte: `www.wikipedia.org`)

10. Incastri di poliedri

Le peculiarità formali di alcuni poliedri permettono di innestare al loro interno altri poliedri in modo che i vertici di quest'ultimi coincidano con quelli dei primi. In questo modo si generano i cosiddetti **poliedri composti**.

In particolare se i poliedri che si utilizzano sono tutti **regolari**, si ottengono **poliedri composti regolari**: di essi si dice che l'**inviluppo convesso** è un poliedro regolare.

Definizione 10.0.1 Dato un insieme di punti del piano o dello spazio, definiamo **inviluppo convesso** (anche involucro convesso), piano o solido, il più piccolo insieme bidimensionale o tridimensionale che contiene i punti assegnati.

Nel caso del piano, l'inviluppo convesso si configura come un poligono (con un numero di punti $n > 2$), mentre nello spazio esso si configura come un poliedro (avendo un numero di punti $n > 4$).

Preso un poliedro regolare e considerati tutti i possibili innesti di uno stesso poliedro all'interno del primo, si ottiene un **poliedro stellato**.

10.1 Cubo

Nel caso del cubo, dotato di 8 vertici, se si intende coprire tutti i vertici bisogna utilizzare **due tetraedri** (in quanto ognuno è formato da 4 vertici). Sono dunque due i tetraedri necessari a coprire tutti i vertici del cubo.

10.2 Dodecaedro

L'unico innesto possibile di un poliedro regolare all'interno di un dodecaedro (20 vertici), tale da scegliere in modo combinatoriamente diverso i vertici del dodecaedro esterno, può essere realizzato con **cinque tetraedri**.

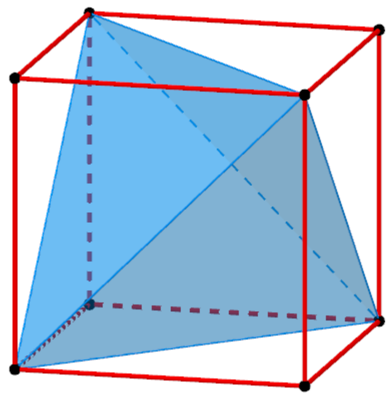


Figura 10.1: Tetraedro in un cubo

In realtà esistono due ulteriori incastri, ovvero quello di **dieci tetraedri** in un dodecaedro e quello di **cinque cubi** nel dodecaedro, ma ciò comporterebbe che alcuni vertici del poliedro esterno siano comuni a più tetraedri o cubi.

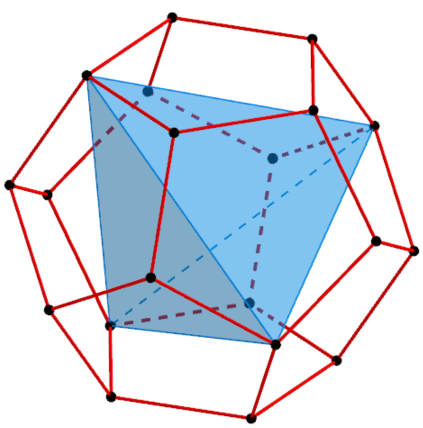


Figura 10.2: Tetraedro nel dodecaedro

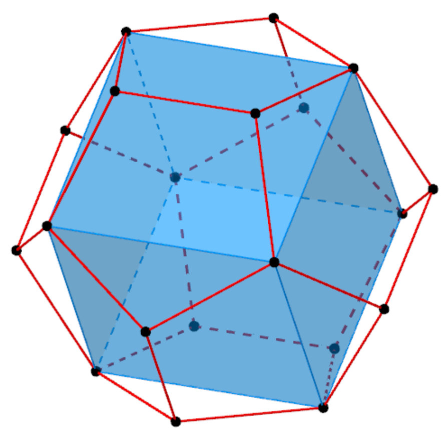
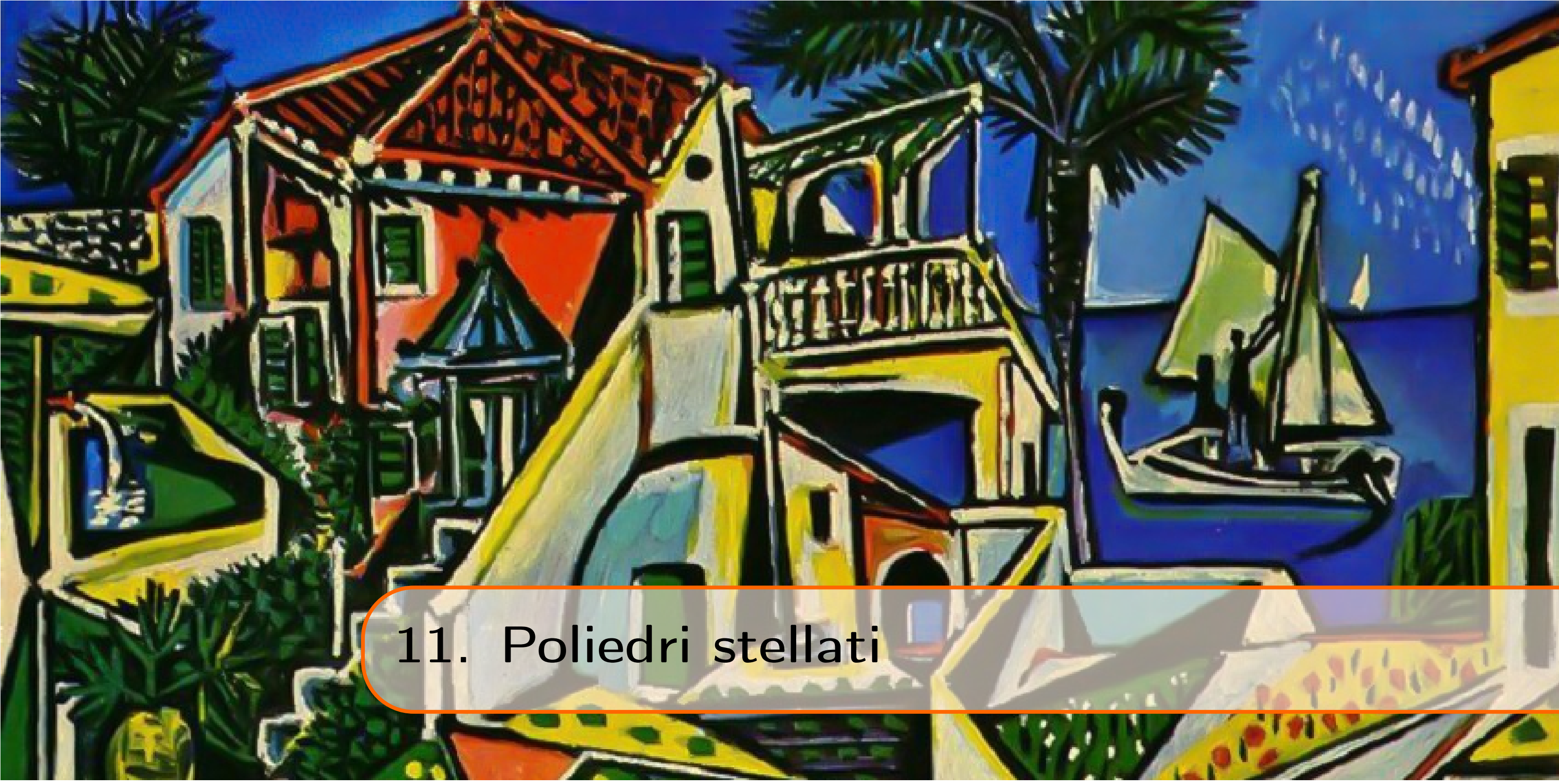


Figura 10.3: Cubo nel dodecaedro



11. Poliedri stellati

11.1 Prisma stellato

Nella geometria solida, il prisma stellato è un poliedro appartenente alla famiglia dei prismi. Si tratta di un poliedro uniforme, stellato e non convesso. Come facce orizzontali parallele ha due poligoni stellati, connessi da un ciclo di quadrati, che a differenza di quanto accade nei prismi normali, nel prisma stellato si intersecano. Per ogni poligono stellato esiste un prisma. Il più semplice è quello pentagonale, con 5 lati, inoltre possono esistere più poligoni regolari stellati con lo stesso numero di lati. I poliedri duali dei prismi stellati sono le bipiramidi stellate. Per i poliedri stellati la relazione di Eulero tra i vertici, facce e spigoli è valida (la relazione di Eulero è $V - S + F = 2$) nonostante non siano poliedri convessi.

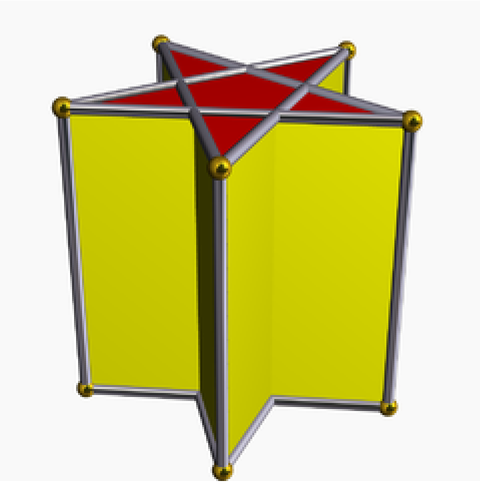


Figura 11.1: Prisma stellato pentagonale (fonte: `www.wikipedia.org`)

11.2 Antiprisma stellato

In geometria solida, l'antiprisma stellato è un poliedro della famiglia degli antiprismi. Si tratta di un poliedro uniforme, stellato e non convesso. Le facce orizzontali sono poligoni stellati, connesse da un ciclo di triangoli equilateri, che a differenza di quanto accade per gli antiprismi non stellati, si intersecano, creando una superficie laterale abbastanza complessa. Gli antiprismi stellati si distinguono dai prismi stellati per la rotazione delle basi e per la connessione tra di esse tramite triangoli invece che per mezzo di quadrati. Per ogni poligono stellato vi è un corrispettivo antiprisma stellato. Il più semplice, come per i prismi, è quello pentagonale. **I poliedri duali degli antiprismi stellati sono i trapezoedri stellati**. Per gli antiprismi stellati è valida comunque la relazione di Eulero (la relazione di Eulero è $V - S + F = 2$) tra il numero di facce, spigoli e vertici benché non siano poliedri convessi.

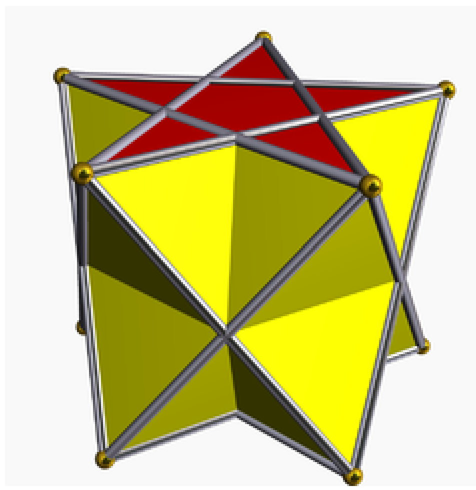


Figura 11.2: Antiprisma stellato pentagonale (fonte: `www.wikipedia.org`)

12. Una conclusione irregolare

Nel corso della trattazione abbiamo avuto l'occasione di approfondire il vasto mondo dei poliedri, la cui esplorazione ha avuto inizio tantissimi anni or sono.

Il caro Pitagora (570-495 a.C. circa), non contento di avere modificato geneticamente – ovviamente con il suo celeberrimo teorema – la *forma mentis* dei matematici delle generazioni a venire, sembra avesse deciso di fare le cose in grande e di estendersi alla terza dimensione. Pare, secondo alcune fonti tra le quali la più citata è Proclo (neopitagorico del V secolo d.C.), che il maestro avesse scoperto le cinque forme regolari, i cinque corpi che sarebbero stati largamente descritti nel *De divina proportione* del rinascimentale Fra' Luca Pacioli (1445-1517), illustrato da Leonardo. Purtroppo delle scoperte pitagoriche non ci rimangono fonti dirette; tuttavia, Platone (428-348 a.C. circa), appena un secolo dopo, descrive nella sua famosa opera sul divino artefice, il *Timeo*, codeste forme incorruttibili: i cinque poliedri regolari.

Eppure abbiamo scoperto, contrariamente a quanto si pensa in modo intuitivo, che questo termine – regolare – non è autoesplicativo. Non è certo il momento di abbandonarci a intuizioni noetiche, come ci suggerirebbe Platone. La regolarità è bellezza: questo non è sufficiente per un matematico. Ci sono molti oggetti matematici, molte forme che *sembrano* regolari, ma in realtà regolari non sono affatto. Abbiamo potuto così ragionare di figure solide che hanno facce regolari, ma non sono regolari; poliedri con figure al vertice regolari che non sono regolari (ci scusiamo per l'abuso del termine regolare, anche se sarebbe stato regolarmente impossibile regolarci in modo differente)...

Consideriamo l'elenco delle condizioni affinché un poliedro possa essere definito "regolare" (si veda il paragrafo 2.3).

Definizione 12.0.1 Si definisce **regolare** un poliedro in cui:
1. tutte le facce sono poligoni regolari;
2. tutte le facce sono uguali fra loro;
3. tutte le figure al vertice sono poligoni regolari;
4. tutte le figure al vertice sono uguali fra loro.

Sarebbero sufficienti, per esempio, i vincoli 1 e 2 a garantire che il solido rintracciato sia un poliedro regolare? No, e per dimostrarlo è sufficiente un unico, solo controesempio. Vediamo: la condizione di avere per facce poligoni regolari e le facce tutte uguali è soddisfatta da qualunque deltaedro (non regolare, ovviamente), come la dipiramide triangolare (paragrafo 8.2): le facce sono costituite esclusivamente da triangoli equilateri congruenti.

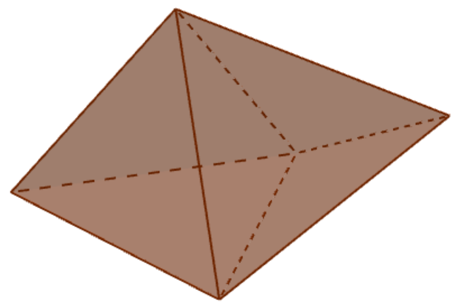


Figura 12.1: Dipiramide triangolare

Nemmeno le condizioni 1 e 3 sono sufficienti a individuare univocamente un poliedro regolare: basta considerare un prisma retto uniforme (es. a base pentagonale) con quadrati costituenti le facce laterali o un poliedro archimedeo (come il cubottaedro, paragrafo 5.2.6) per dimostrarlo. Il prisma a base pentagonale ha le facce costituite da poliedri regolari (pentagoni regolari e quadrati) e le figure al vertice uguali tra loro (sono triangoli isosceli); lo stesso vale per un cubottaedro, che ha per facce triangoli equilateri e quadrati e le figure al vertice tutte uguali tra loro (questa è una proprietà caratteristica dei poliedri archimedei).

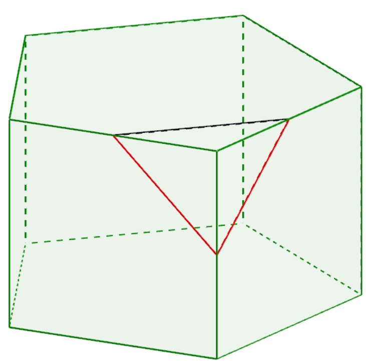


Figura 12.2: Prisma retto a base pentagonale e quadrati come facce laterali

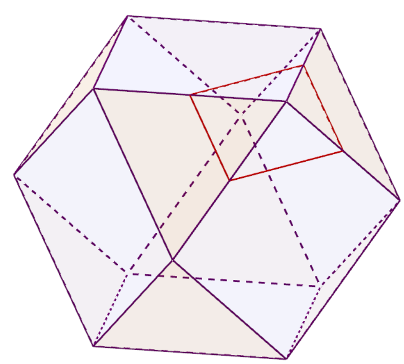


Figura 12.3: Cubottaedro

Altri controesempi che dimostrano come non siano sufficienti due sole delle condizioni sopra indicate (eccezion fatta per la coppia 1-4) si possono riportare per le coppie di condizioni che seguono.

2 e 3 In questo caso si potrebbe considerare un tetraedro avente come facce triangoli isosceli congruenti tra loro (ecco soddisfatta la condizione 2); essi sono disposti in modo tale che in ogni vertice arrivino due spigoli lunghi (ovvero i lati obliqui congruenti del triangolo isoscele) e uno corto: così le figure al vertice sono tutte congruenti tra loro (condizione 3).

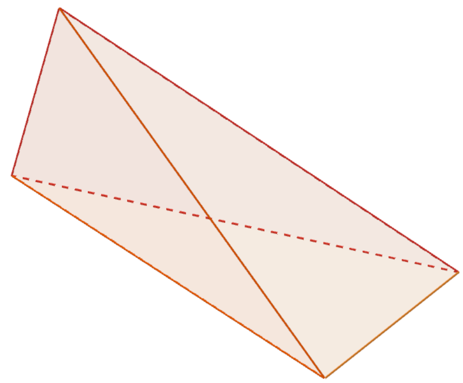


Figura 12.4: Tetraedro irregolare

2 e 4 Il dodecaedro rombico ha le facce tutte uguali (sono rombi congruenti tra loro, condizione 2) e ha come figure al vertice bordi di poligoni regolari, triangoli equilateri e quadrati (condizione 4 rispettata).

3 e 4 Considerate un altro prisma retto a base pentagonale regolare che ha le figure al vertice tutte uguali tra loro (condizione 3): in questo caso però il prisma ha un'altezza tale da rendere le figure al vertice triangoli equilateri (condizione 4).

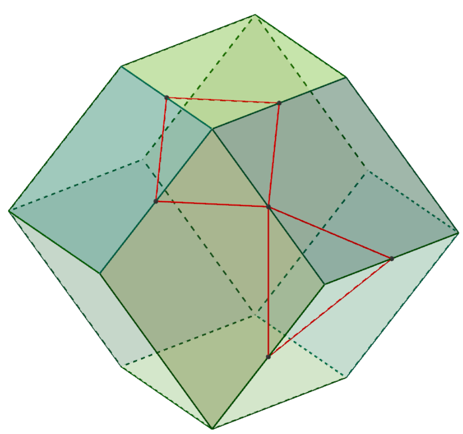


Figura 12.5: Dodecaedro rombico

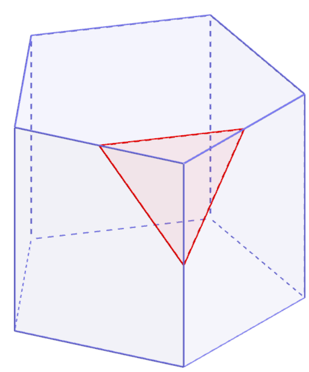


Figura 12.6: Prisma retto a base pentagonale che rispetta le condizioni 3 e 4

Ecco allora che non rimane altro che la coppia di condizioni 1-4 (come anticipato nel paragrafo 2.3) a costituire la condizione necessaria e sufficiente affinché un poliedro sia regolare...

Anche se solo 5 dei poliedri studiati - i solidi platonici - sono insigniti del titolo di "regolare", possiamo stilare una tabella riassuntiva di tutte le varie "regolarità" incontrate, associate ai solidi in cui si possono riconoscere.

Categoria di solidi	**Regolarità**
Poliedri regolari	• Facce regolari, spigoli congruenti; • V-regolari; • facce e figure al vertice congruenti; • centro equidistante da tutte le facce, gli spigoli e i vertici.
Poliedri di Archimede	• Poligoni regolari come facce, spigoli congruenti; • figure al vertice congruenti; • vertici isometrici.
Poliedro di Miller	• Poligoni regolari come facce, spigoli congruenti
Solidi di Catalan	• V-regolari; • angoli convergenti nel medesimo vertice sono congruenti; • facce isometriche.
Bipiramidi e trapezoedri	• Facce congruenti • V-regolari (cfr. par. 6.3)
Solidi di Johnson	• Facce regolari
Deltaedri	• Poligoni regolari come facce (triangoli equilateri)
Prismi retti uniformi, antiprismi uniformi (anche stellati)	• Poligoni regolari come facce (poligoni regolari, non convessi nel caso degli stellati)

Tabella 12.1: Regolarità lungo il percorso

Faremo tutti più attenzione la prossima volta che saremo chiamati a parlare di regolarità.

13. Dimensioni alternative d'arte

È giunto il momento di presentare un'altra parte del *Divertimento*: l'arte. *Divertimento* nel senso di creatività, ricerca, scoperta e realizzazione di forme personali, manipolazioni della materia, che può essere una semplice scatola, un bicchiere, un vecchio cartone da imballaggi, e reinventare.

In questa sezione sono presentati alcuni degli elaborati realizzati dagli studenti-autori. I lavori esposti in questa trattazione sono stati realizzati con estrema libertà di scelta dei materiali e del progetto. Unica consegna: realizzare un elaborato che potesse esprimere artisticamente la terza dimensione. Il che è lo stesso criterio con cui sono state selezionate le opere d'arte a corredo del titolo di ciascun capitolo.

In questo capitolo:

V. Alberini, *Razzo di Pisa*
A. Alinovi, *Scrigno piramidale*
A.S. Andrei, *Amore poliedrico*
F. Bertini, *Emozioni agghiaccianti*
M. Buzzi, *The Light Catcher*
L. Cantoni, *Luce di notte 3D*

13.1 Virginia Alberini, *Razzo di Pisa*

Figura 13.1: V. Alberini, *Razzo di Pisa*, cartoncino, plastica e acrilico

13.2 Alessia Alinovi, *Scrigno piramidale*

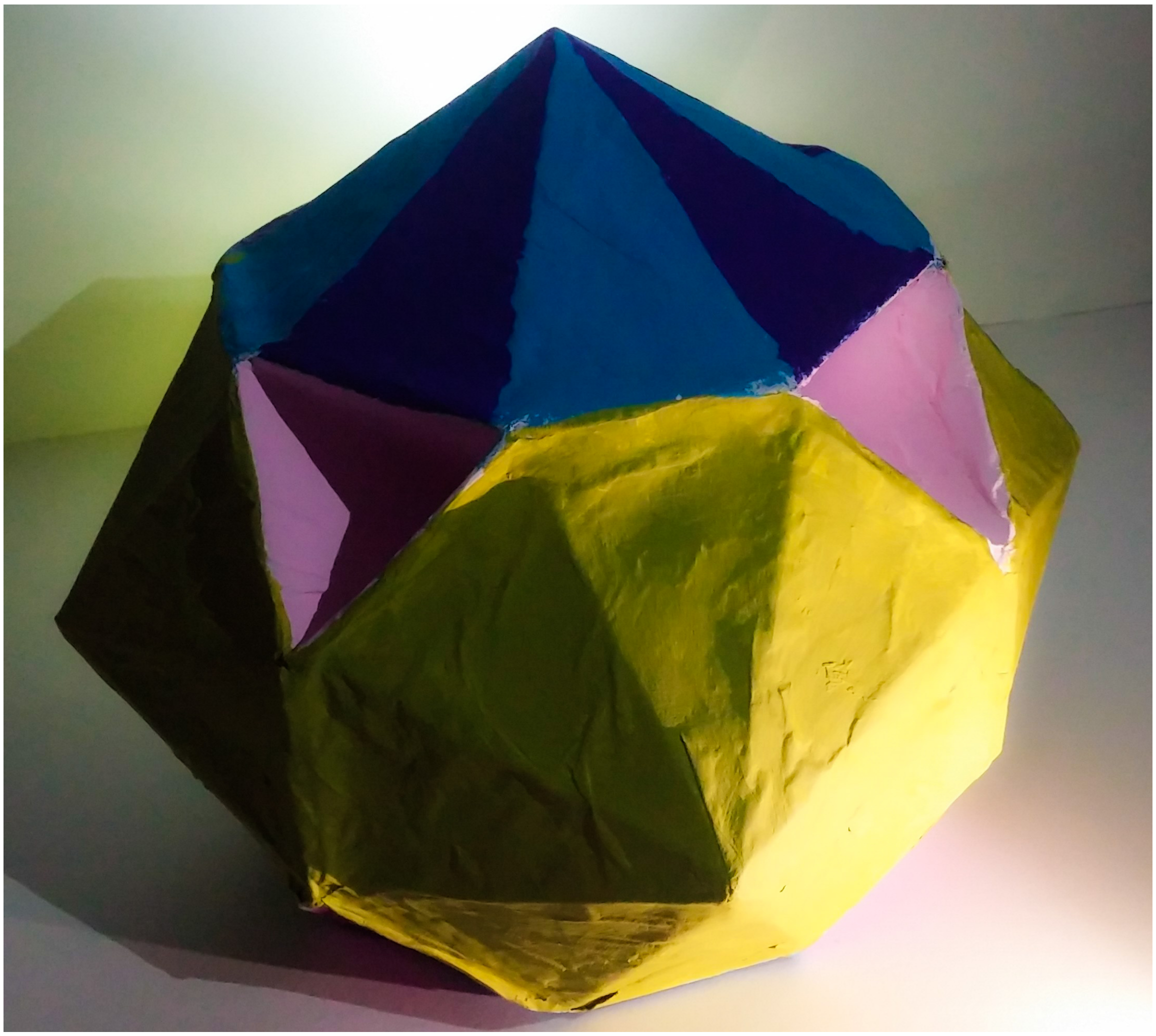


Figura 13.2: A. Alinovi, *Scrigno piramidale*, cartoncino e acrilico

13.3 Antonio Sandro Andrei, *Amore poliedrico*

Figura 13.3: A.S. Andrei, *Amore poliedrico*, cartoncino e acrilico

13.4 Filippo Bertini, *Emozioni agghiaccianti*

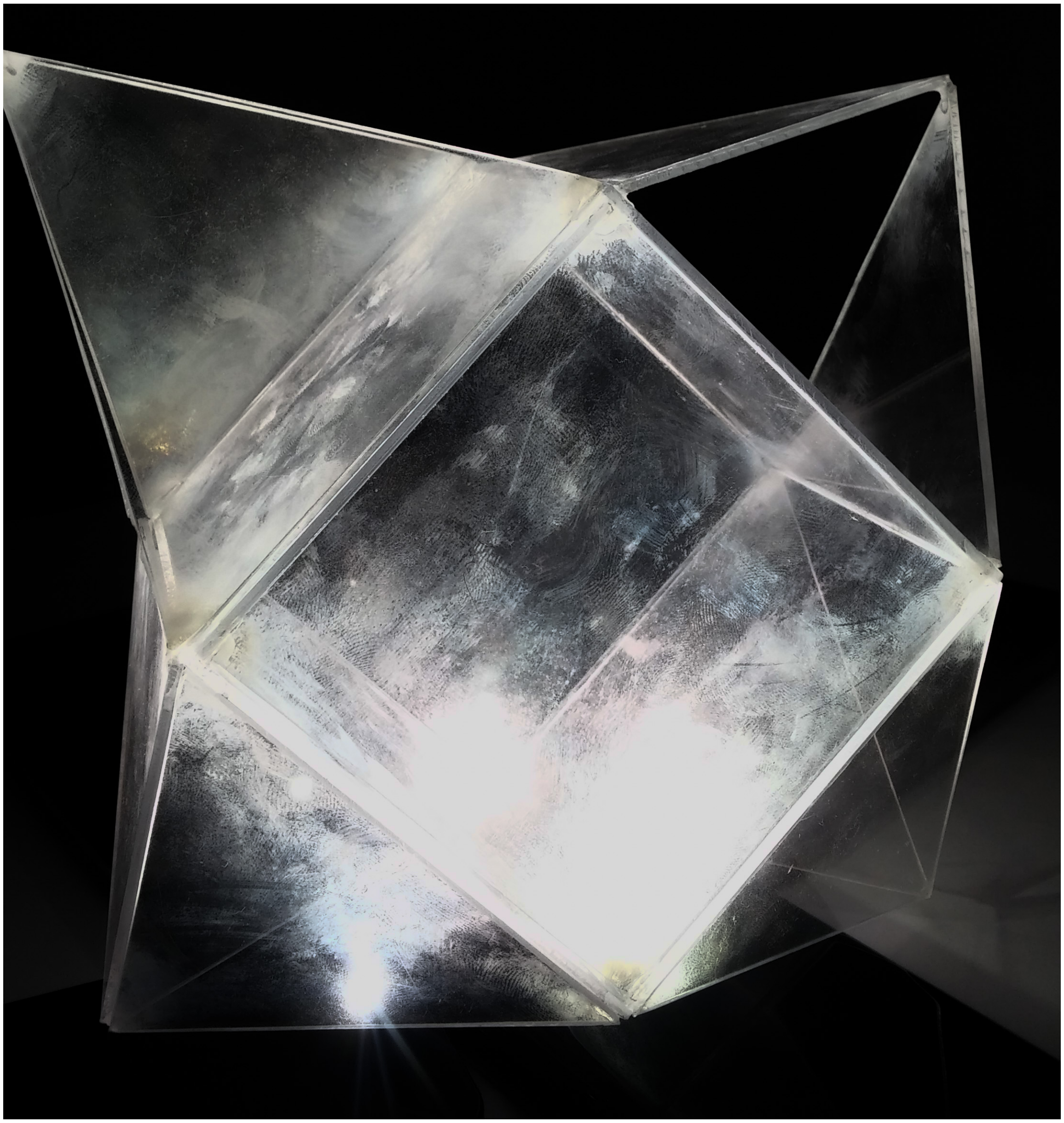


Figura 13.4: F. Bertini, *Emozioni agghiaccianti*, polimetilmetacrilato (plexiglass)

13.5 Massimo Buzzi, *The Light Catcher*

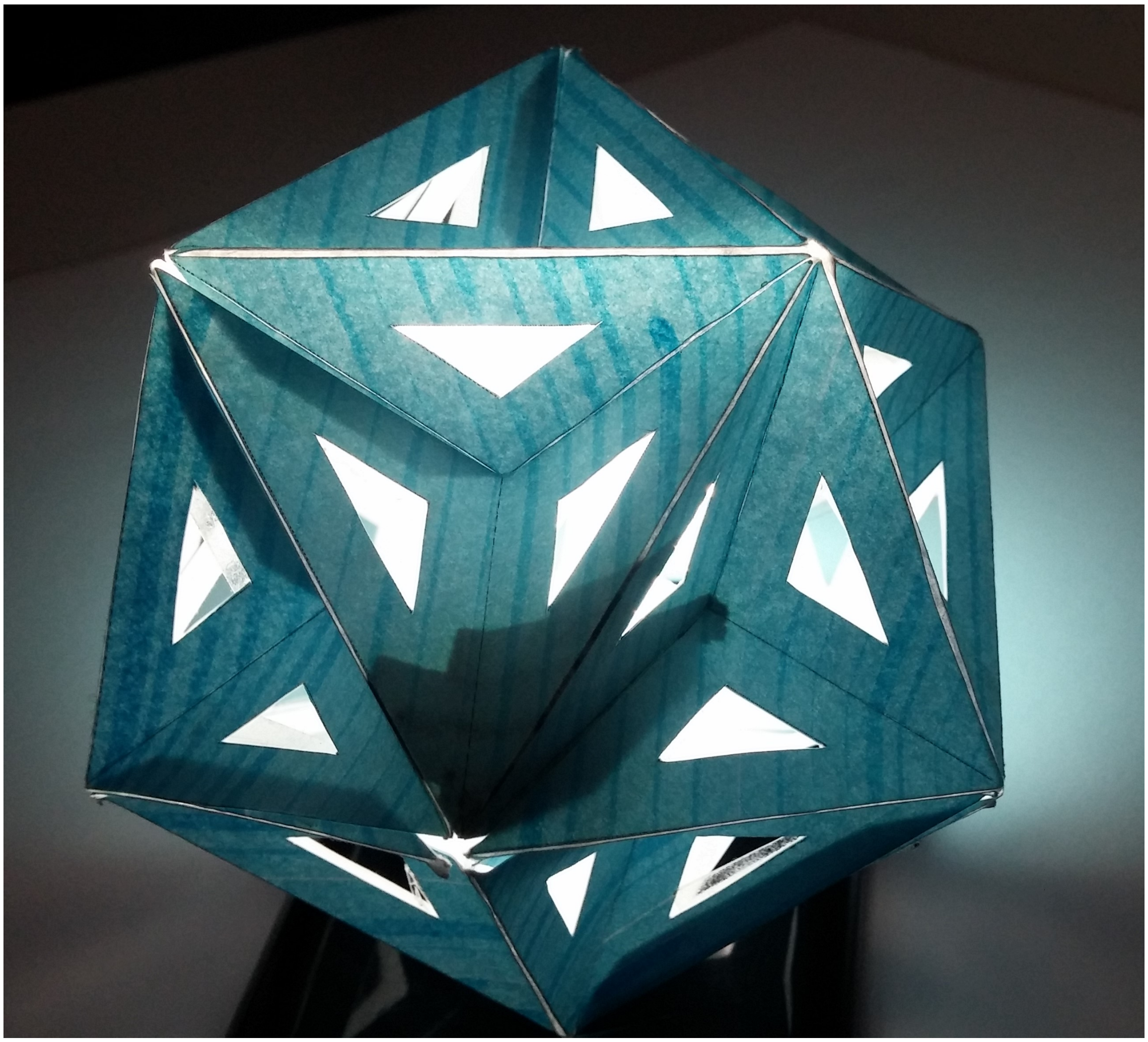


Figura 13.5: M. Buzzi, *The Light Catcher*, cartoncino

13.6 Luca Cantoni, *Luce di notte 3D*

Figura 13.6: L. Cantoni, *Luce di notte 3D*, tempera su tavola, cartoncino e acrilico

Elenco delle figure

Bibliografia e sitografia

Riferimenti bibliografici

M. Dedò, *Forme. Simmetria e topologia*, Padova, Zanichelli-Decibel, 1999;

G. Barozzi, M. Bergamini, A. Tifone, *Matematica.blu 2.0*, 4, cap. 15, Zanichelli, 2013;

V. A. Zalgaller, *Convex polyhedra with regular faces*, 1969.

Riferimenti sitografici

https://it.wikipedia.org/wiki/Solido_di_Johnson

https://storiografia.me/2013/11/18/solidi-archimedei-poliedri-semiregolari/

https://it.wikipedia.org/wiki/Antiprisma_stellato

http://it.unionpedia.org/Solido_archimedeo

https://it.wikipedia.org/wiki/Chiralit%C3%A0_(matematica)

https://it.wikipedia.org/wiki/Tetraedro_regolare

https://it.wikipedia.org/wiki/Rombicubottaedro

http://www.robertogiunti.it/RelPlat/Sez2.pdf

http://www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/alumni/laureati-PFA/canu/tesina-PFA.pdf

http://www.youmath.it/formulari/formulari-di-geometria-solida/481-poliedri-regolari.html

https://it.wikipedia.org/wiki/Cubo_simo

http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2012/04/poliedri-Majorana.pdf

https://it.wikipedia.org/wiki/Poliedro_composto

https://it.wikipedia.org/wiki/Inviluppo_convesso

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Dic_03/PoliedroDuale.htm

https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid

https://it.wikibooks.org/wiki/Matematica_per_le_superiori/Geometria_solida

In copertina: L. Saffaro, *La stella di Origene* (opus CCXCII), 1991, olio su tela.

Riferimenti iconografici per i titoli dei capitoli: P. della Francesca, *La città ideale*, 1470, olio su tavola, particolare; G. De Chirico, *Il trovatore*, 1917, olio su tela, particolare; R. Magritte, *Souvenir de voyage*, 1955, litografia, particolare; S. Dalì, *Corpus Hypercubus*, 1954, olio su tela, particolare; C. Carrà, *Natura morta con squadra*, 1917, olio su tela, particolare; A. Dürer, *Melancholia I*, 1514, incisione a bulino, particolare; M.C. Escher, *Planetoide tetraedrico*, 1954, xilografia, particolare; R. Gonsalves, *The phenomenon of floating*, 2012, olio su tela, particolare; V. Kush, *Treasure Island*, 2005, olio su tela, particolare; G. Braque, *Il porto di Anversa*, 1906, olio su tela, particolare; L. Saffaro, *Il piano di Orfeo*, 1991, olio su tela, particolare; P. Picasso, *Paesaggio mediterraneo*, 1952, olio su tela, particolare; E. Müller, *The Crevasse*, 2008, 3D Street Art, Dun Laoghaire (Irlanda); Fra' Giovanni da Verona, 1519-1523, intarsio ligneo della sagrestia in Santa Maria in Organo.

Riferimenti iconografici per le immagini utilizzate nella trattazione sono forniti dalle didascalie associate a ciascuna di esse; le immagini di cui non viene esplicitata la fonte sono state prodotte dagli autori tramite disegni, il software GeoGebra o si tratta di oggetti realizzati con la stampante 3D.

Liceo Attilio Bertolucci Editore

Via Toscana 10/a - 43122 Parma
prps05000e@istruzione.it - 0521 798459

ISBN 9788898952083
Editato in Parma, agosto 2016