Luca Cantoni

Dispensa di geometria analitica

Ovvero, come districare il groviglio
(sperando vi sia un solo filo)

Liceo Scientifico-Liceo Musicale
Attilio Bertolucci

Liceo Attilio Bertolucci Editore

ISBN 9788898952052

Indice

Introduzione

> «Si deve piuttosto pensare soltanto ad aumentare il lume naturale della ragione, non per risolvere questa o quella difficoltà di scuola, ma perché in ogni circostanza della vita l'intelletto indichi alla volontà ciò che si debba scegliere.»
>
> René Descartes, *Discours de la méthode*

L'idea di redigere una dispensa, proposta dalla docente di matematica, è sorta dalla necessità di fornire allo studente un valido strumento per affrontare con metodo rigoroso ed efficace lo studio della geometria analitica, argomento che occupa la maggior parte della programmazione di matematica del terzo anno al liceo scientifico.

L'intero progetto, dall'inizio della prima stesura alla pubblicazione, ha avuto una durata di circa cinque mesi. Ogni lezione teorica di geometria analitica verteva sul metodo: al termine l'insegnante assegnava la creazione di schede riassuntive e, ovviamente, funzionali.

La dispensa raccoglie una serie di brevi e semplici trattazioni riguardanti il metodo e i principali strumenti propedeutici e di approfondimento che suggeriscono come approcciarsi ai diversi, e spesso complicati, problemi di geometria analitica: quale sistema di riferimento conviene scegliere? Come utilizzare un punto parzialmente vincolato? Quale è il metodo più breve che consente di individuare il tal luogo geometrico?

Anticipate da una piccola analisi delle differenze fondamentali tra la geometria euclidea e la geometria analitica, si possono trovare, nella prima parte della trattazione, sezioni riguardanti i tre diversi metodi fondamentali per la risoluzione di problemi analitici (metodo del luogo di punti, metodo del fascio e metodo di Cartesio, qui chiamato "consìderalo già risolto"), schede tattiche e strategie di *problem solving*. Nella seconda parte della dispensa, oltre ad una raccolta di varie costruzioni commentate, si può osservare l'applicazione di quanto trattato nella prima parte, attraverso la risoluzione di quattro problemi caratteristici (Capitolo 7). Il processo risolutivo non è opera dell'autore della dispensa, bensì di alcuni compagni di classe:

"Parabola tangente ad una retta in un punto e passante per un punto" risolto da Massimo Buzzi;

"Parabola passante per tre punti assegnati" risolto da Leonardo Ferrari;

"Circonferenza per un punto e tangente a una retta in un punto" ideato e risolto da Alessia Alinovi;

"Circonferenze per due punti e tangenti a una retta data" tratto dal libro di testo in adozione (Bergamini, Trifone, Barozzi, Matematica.blu 2.0, vol. 3, Zanichelli, ISBN 9788898257208, pg. 279 n. 195) e risolto da Alessandro Del Bono.

Le illustrazioni, la maggior parte delle quali realizzate con il software GeoGebra, sono opera dell'autore. Alla revisione finale ha contribuito la docente stessa, prof.ssa Silvia Monica. Il testo è redatto in LaTeX, programma per la compilazione tipografica di documenti prevalentemente scientifici.

30 settembre 2015,
Luca Cantoni

Parte I

Riferimenti teorici

Capitolo 1

Dalla geometria euclidea alla geometria analitica

Nel momento in cui si inizia a studiare la geometria analitica occorre tenere presente che ogni aspetto algebrico, ogni formula rappresenta un oggetto geometrico.

Mentre la geometria euclidea potrebbe sembrare quasi disgiunta dall'aspetto più quantificabile della matematica, in realtà tale aspetto è solamente celato sotto l'enunciazione di un teorema.

Ecco che possiamo - anzi dobbiamo - considerare alcune importanti corrispondenze tra l'ambito geometrico e quello algebrico nel momento in cui si sottintende il primo per soffermarsi meglio sul secondo.

Geometria euclidea	**Geometria analitica**
Punto	Coordinate $(x;y)$
Luogo di punti	Equazione in due incognite x e y
Dominio piano	Disequazione in due incognite x e y

Capitolo 2

Metodi analitici e metodi geometrici

2.1 Il metodo del luogo di punti

Il metodo del luogo di punti prevede che la risoluzione di problemi sia strettamente intrecciata con l'ambito geometrico. Esso può essere riassunto come mostrato qui di seguito.

1. **Punto variabile P(x;y).**
   Considerare un punto $P(x; y) \in \Gamma$, le cui coordinate non sono definite, ma, se sostituite nell'equazione del luogo, tale equazione resta sempre verificata. Possiamo individuare due differenti aspetti, quello *geometrico* e quello *algebrico*, nella medesima situazione:

Ambito geometrico	Ambito algebrico
P è un punto del luogo ed è variabile	$(x; y)$ sono coordinate variabili
Γ è il luogo di punti da trovare	Γ è rappresentato da un'equazione in x e y

2. **Identificare la proprietà caratteristica.**
   Identificare la proprietà caratteristica che contraddistingue il luogo (che contiene parametri o dati numerici, dunque necessari per l'identificazione del luogo medesimo).

3. **Dati.**
   Determinare i dati necessari.

4. **Dalla geometria all'algebra.**
   Tradurre in forma algebrica la proprietà geometrica.

5. **Semplificare.**
   Semplificare il più possibile l'espressione ottenuta.

2.2 Il metodo di Cartesio o «consideralo già risolto»

Il metodo «consideralo già risolto» consiste nell'osservare il problema da un punto di vista privilegiato: la fine.

1. **Individuare il luogo Γ.**
   Individuare il luogo di punti di cui si deve trovare l'equazione (una retta, una circonferenza, una coppia di rette...).

2. **Imporre le condizioni necessarie.**
   In base alle informazioni necessarie per determinare l'equazione del luogo (per es. la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$), scrivere le condizioni che occorrono per individuare il luogo Γ. Nel caso della circonferenza, essendo in possesso delle coordinate di tre dei suoi punti, il metodo «consideralo già risolto» consiste nell'imporre il passaggio della circonferenza per i tre punti assegnati.

2.3 Il metodo del fascio

Quest'ultimo metodo risolutivo ci consente di suddividere il problema in due parti più semplici da risolvere.

1. **Sospensione di una condizione e generazione del fascio.** [Figura 1]
   Per risolvere i problemi di geometria analitica seguendo il metodo del fascio occorre anzitutto considerare che tale metodo può essere utilizzato solo nel caso in cui si possa costruire un **fascio** di oggetti simili a quello ricercato (che può essere considerato una "famiglia" di oggetti, un insieme), all'interno del quale si trova la risposta che ci occorre.

2. **Applicazione della condizione sospesa.** [Figura 2]
   Dopo avere originato un insieme, il fascio, nel quale si trova sicuramente l'oggetto matematico che cerchiamo, occorre applicare a tale gruppo di oggetti la condizione inizialmente sospesa. Così facendo si va a determinare un ulteriore insieme che, intersecato con quello iniziale più ampio, individua un solo oggetto, il luogo cercato. Il tutto si può visualizzare con un diagramma di Eulero-Venn.

   Consideriamo il caso in cui siano tre le informazioni da ricercare per poter risalire all'equazione del luogo desiderato. La risoluzione concettuale basata sul metodo del fascio si può schematizzare secondo la rappresentazione che segue.

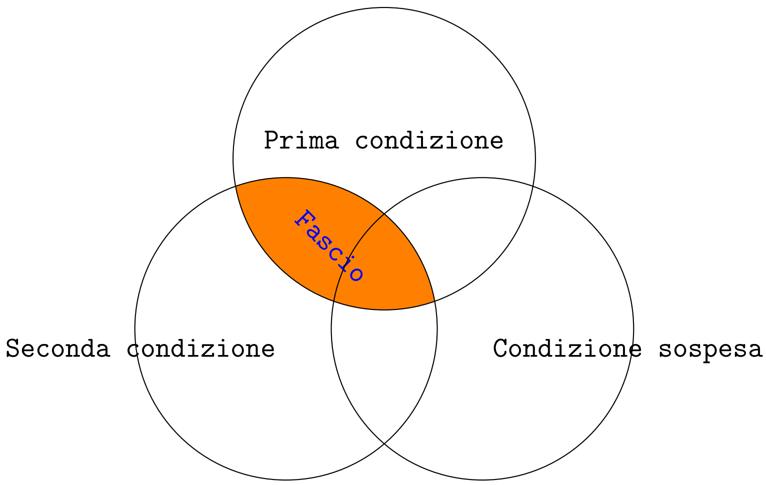


Figura 2.1: Sospensione di una condizione.

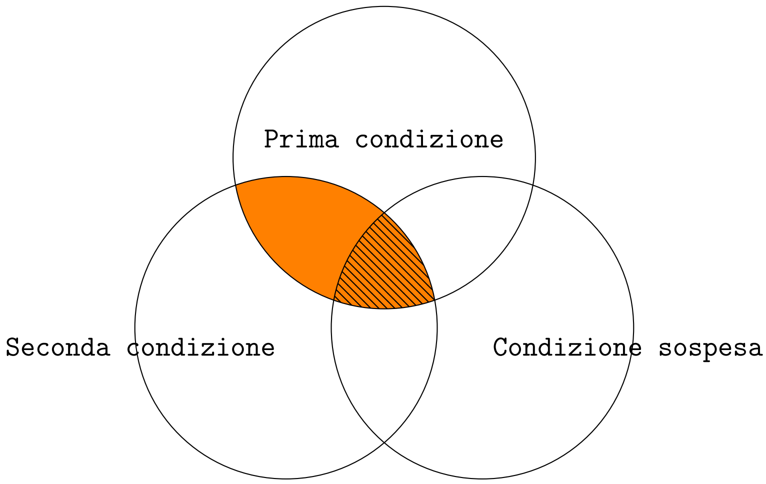


Figura 2.2: All'intersezione tra le tre condizioni si trova la soluzione.

2.4 Riepilogo e confronto fra i metodi

Qui di seguito proponiamo una tabella riassuntiva sui tre metodi sopraelencati al fine di riepilogarli e compararli.

	Metodo del luogo di punti	**Metodo cartesiano**	**Metodo del fascio**
Cosa comporta?	Conoscere la proprietà caratteristica del luogo/oggetto cercato e tradurla in forma algebrica.	Avere una visione generale del problema (compresa la soluzione) e risolverlo a ritroso.	Sospendere una delle tre condizioni e considerarla solo dopo aver costruito un fascio con le altre due.

Capitolo 3

Schemi di problem solving

3.1 Schema dei due luoghi

La risoluzione dei problemi di geometria analitica con lo schema dei due luoghi è concettualmente intuitiva e semplice da concepire: occorre trovare l'equazione di un luogo di punti $\Gamma = f(x)$ che si trova ad essere determinato da due caratteristiche che, a loro volta, sono rappresentate da altrettanti luoghi $\Lambda_1 = g(x)$ e $\Lambda_2 = h(x)$ già conosciuti. Per risalire all'equazione del luogo Γ **è sufficiente determinare l'intersezione dei due luoghi Λ_1 e Λ_2.**

$$\Gamma = f(x) = \begin{cases} g(x) \\ h(x) \end{cases}$$

A differenza del metodo del luogo di punti, in cui occorre assumere un punto $P(x; y)$ variabile, la risoluzione mediante lo schema dei due luoghi richiede invece l'individuazione di due luoghi da intersecare.

3.2 La sospensione della condizione e il problema ausiliario

La risoluzione dei problemi mediante il metodo del fascio richiede la ristrutturazione dei problemi medesimi. Con ciò si intende considerare il problema **da risolvere come un insieme di altri sotto-quesiti** di cui trovare la soluzione, così da semplificare il problema iniziale: come scriveva Descartes (Cartesio) nel suo *Discours de la méthode*, sarebbe occorso «[...] dividere ognuna delle difficoltà sotto esame nel maggior numero di parti possibile, e per quanto fosse necessario per un'adeguata soluzione [...]».

Dovendo sospendere una condizione, è come se si considerasse un ulteriore problema semplificato, utile per giungere alla soluzione: occorre dunque considerare un **problema ausiliario**. Per visualizzare meglio, si può così rappresentare la risoluzione di problemi mediante la sospensione di una condizione:

`Problema AUSILIARIO`	$+$	`terza condizione (precedentemente sospesa)`

Capitolo 4

Schede tattiche

4.1 Punti parzialmente vincolati

Prendiamo come esempio il seguente problema:

Problema Determinare un punto P di ascissa -4 ed ordinata positiva la cui distanza dalla retta r : $2y - x + 6 = 0$ sia $4\sqrt{5}$.

In problemi come questo è conveniente vincolare il punto che ci è stato assegnato alla retta cui deve appartenere (o in generale, al luogo cui deve appartenere). In questo modo, al **variare della variabile indipendente** x, la variabile dipendente y del punto **è vincolata** ad assumere valori non casuali.

1. Prendere un punto P di coordinate variabili $(x_P; y_P)$.

2. Individuare l'equazione $y = f(x)$ del luogo geometrico cui il punto, che chiameremo **parzialmente vincolato**, deve appartenere: utilizziamo il termine "parzialmente" perché, mentre la y è vincolata totalmente, la x può assumere qualsiasi valore.

3. Riscrivere le coordinate del punto P sostituendo al posto di y_P il valore che tale variabile deve assumere affinché P appartenga al luogo indicato.

   $\Gamma : \ y = f(x)$

$$\boxed{P(x_P; y_P) \rightarrow P(x; f(x))}$$

4.2 Intersezioni fra luoghi

L'**intersezione fra luoghi** è il passo fondamentale su cui si basa il metodo risolutivo dello **schema dei due luoghi**. Quando occorre trovare un luogo geometrico $\Gamma = f(x)$, definito come l'intersezione del luogo $\Gamma_1 = g(x)$ e del luogo $\Gamma_2 = h(x)$, non occorre altro che costruire un **sistema** che includa le equazioni dei due luoghi (assegnati o ricavati tramite dati/proprietà caratteristiche).

$$\boxed{\Gamma = f(x) = \begin{cases} g(x) \\ h(x) \end{cases}}$$

4.3 Il problema della tangente

Qualsiasi conica si consideri, le relazioni che essa ha con una retta del piano possono essere formalizzate sempre nello stesso modo. Se creiamo un sistema (l'unico modo per verificare la modalità della relazione suddetta) con l'equazione della conica e quella della retta possiamo ottenere casi differenti.

Retta esterna $\Delta < 0$. L'equazione risolvente non ha soluzioni: la retta è esterna alla conica.

Retta secante $\Delta > 0$. L'equazione risolvente ha due soluzioni distinte, ovvero due punti del piano: la retta è secante rispetto alla conica.

Retta tangente $\Delta = 0$. È proprio ciò che fa al caso nostro: nel caso in cui il discriminante sia nullo, l'equazione risolvente ha **due soluzioni coincidenti**. Ciò significa che la soluzione del sistema si configurerà come un unico punto P del piano, detto **punto di tangenza**.

Possiamo individuare **due metodi** generali per l'individuazione della retta tangente a una data conica passante per un punto assegnato, **applicabili a tutte le coniche** (circonferenza, parabola, iperbole ed ellisse): il metodo della **polare** e il metodo del **fascio** (già accennato nel paragrafo 2.3).

4.3.1 Metodo della polare

Consideriamo l'equazione generale di una conica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

e definiamo la **polarità** come la funzione biunivoca che fa corrispondere a un punto la rispettiva polare, e viceversa.

Inoltre definiamo la **polare** di un punto P come il luogo dei punti di intersezione delle tangenti alla conica data nei due punti nei quali una secante passante per il polo (il punto a cui si fa corrispondere la polare) taglia la conica.

Introdotte le suddette nozioni, si può illustrare il metodo della polare.

1. Avendo un punto $P(x_0; y_0)$ assegnato (il polo), individuare l'equazione della polare corrispondente con le formule di **sdoppiamento**. Avendo l'equazione generale della conica,

   $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   le formule di sdoppiamento consentono di inserire in tale equazione le coordinate del polo, andando letteralmente a "sdoppiare" le incognite x e y.

   $$\texttt{SDOPPIAMENTO}\begin{cases} x^2 \rightarrow x \cdot x_0 \\ y^2 \rightarrow y \cdot y_0 \\ x \rightarrow \dfrac{x + x_0}{2} \\ y \rightarrow \dfrac{y + y_0}{2} \end{cases}$$

2. Trovata l'equazione della polare, costruire un sistema che comprenda l'equazione della conica e quella della polare: individuando le soluzioni del sistema, si possono scrivere le coordinate dei punti di tangenza T_1 e T_2 (soluzioni del sistema stesso). Se tali punti coincidono, significa che la polare stessa è la tangente cercata.

3. Solo nel caso in cui i due punti **non siano coincidenti**, ma distinti, individuare l'equazione della retta passante per T_1 e P e quella della retta per T_2 e P, trovando così le due rette tangenti alla conica.

4.3.2 Metodo del fascio

Per individuare l'equazione della tangente a una conica si può seguire anche il metodo del fascio, che ritrova analogie con quello precedentemente esposto. Esso consiste nel creare un **fascio di luoghi**, in questo caso un fascio di rette, e di costruire conseguentemente un sistema con l'equazione del fascio e quella della conica.

$$\begin{cases} \texttt{equazione del fascio} \\ \texttt{equazione della conica} \end{cases}$$

Nel fare ciò occorre poi imporre la condizione $\Delta = 0$, che indica, come nel metodo della polare, che la retta da trovare deve essere *tangente*.

Nel dettaglio: la tangente a una circonferenza

Come caso particolare illustriamo ora in breve i vari metodi che consentono di individuare l'equazione della tangente a una circonferenza assegnata γ passante per un dato punto P.

1. **Metodo della polare**
2. **Metodo del fascio con punto esterno**
   Consiste nel creare un fascio di rette passanti per il punto da cui la tangente deve essere condotta e poi applicare a tale fascio la condizione di tangenza: seguendo questo metodo si deve imporre che le rette del fascio debbano avere distanza dal centro pari al raggio di γ.
3. **Metodo del luogo con punto appartenente alla circonferenza**
   In questo caso la tangente non sarà altro che una retta appartenente al fascio di rette passanti per il punto dato ($P \in \gamma$) perpendicolare al raggio condotto per P.

4.4 La scelta del sistema di riferimento

Quando si desidera risolvere con il supporto del piano cartesiano un problema di geometria analitica che richiede di determinare l'equazione di luogo geometrico, è opportuno scegliere il sistema di riferimento nel piano in modo da ottenere coordinate semplici e, di conseguenza, **equazioni particolarmente semplici**. Questo si può fare ogni volta che un problema non fornisce dati specifici.

Esempi:

- se il luogo dipende da due punti A e B fissi ma non noti, conviene fissare l'asse delle ascisse sulla retta che passa per i due punti e mettere l'origine del sistema di riferimento nel punto medio fra i due punti. Quindi le coordinate dei due punti saranno $A(a; 0)$ e $B(-a; 0)$.
- Se il luogo scelto dipende da una retta conviene mettere la retta sull'asse-y o sull'asse-x.
- Se il luogo scelto dipende da due rette non parallele, conviene metterne una sull'asse delle ascisse e il loro punto di intersezione nell'origine del riferimento.
- Se il luogo scelto dipende da una retta e da un punto, conviene mettere l'origine nel punto medio del segmento che congiunge il punto con la sua proiezione sulla retta e mettere l'asse delle ascisse o quello delle ordinate parallelo alla retta data.

Parte II

Risoluzione grafica e algebrica di problemi geometrici

Capitolo 5

Costruzioni geometriche relative alla circonferenza

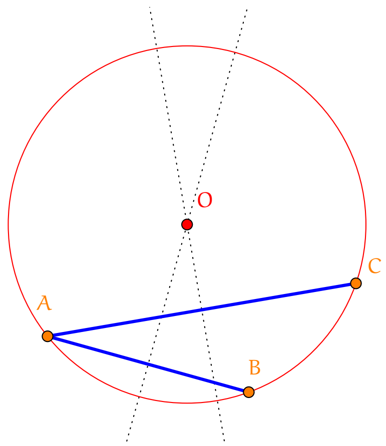
5.1 Il Problema di Apollonio

Il *Problema di Apollonio* si può enunciare in questi termini: "date tre circonferenze, eventualmente degeneri, determinare le eventuali circonferenze tangenti a quelle date".

In base ai tre elementi scelti come circonferenze, eventualmente degeneri (circonferenze, rette o punti), si generano diversi problemi particolari, cinque dei quali sono esposti nelle pagine che seguono.

5.1.1 Punto punto punto (PPP)

Costruzione



1. Disegnare i tre punti assegnati A, B e C.

2. Tracciare gli assi di due dei tre segmenti individuati dai tre punti: nel disegno sono stati disegnati gli assi dei segmenti AB e AC. In realtà si dovrebbero disegnare gli assi di tutti e tre i segmenti: questo però sarebbe inutile, come in seguito si dimostrerà.

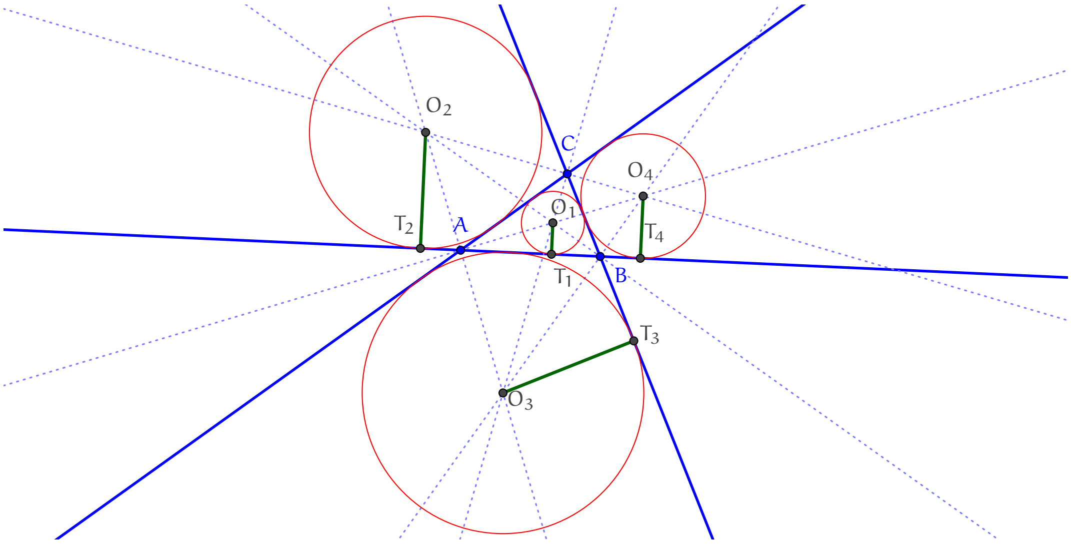
3. Il punto O d'intersezione dei due assi disegnati è il centro dell'unica circonferenza passante per i tre punti.

4. Tracciare la circonferenza di centro O e raggio $OA \cong OB \cong OC$.

Disegnare i tre assi sarebbe stato inutile: infatti, tracciato l'asse di AB (ovvero il luogo dei punti equidistanti da A e da B) e l'asse di AC (luogo dei punti equidistanti da A e da C), si trova un punto che è equidistante dai tre punti A, B e C. Si rivelerebbe dunque superfluo tracciare il terzo asse (in questo caso del segmento BC) perché non si troverebbe altro che il punto equidistante da B e da C (già trovato!).

5.1.2 Retta retta retta (TTT)

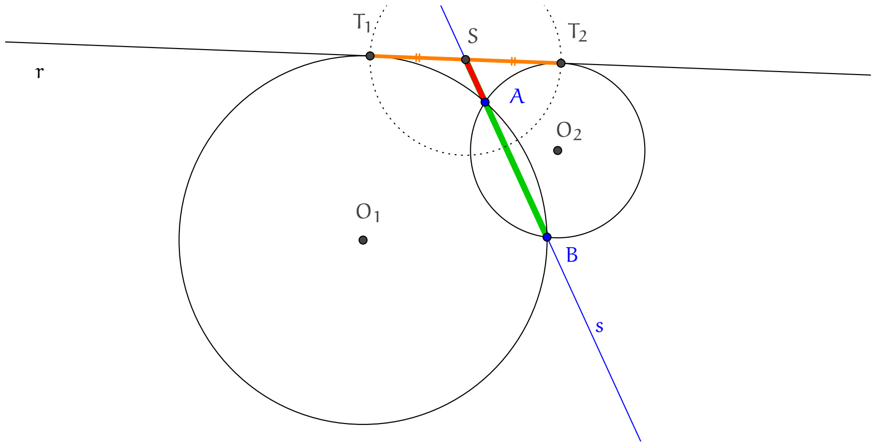
Costruzione



1. Disegnare le tre rette di partenza ed individuare i loro punti d'intersezione A, B, C.
2. Considerando il triangolo ABC, individuare l'incentro O_1, centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Tale punto è individuato dall'intersezione delle bisettrici degli angoli interni e dunque si trova ad essere il luogo dei punti (che si configura come **un solo** punto) equidistanti dai lati del triangolo ABC.
3. Disegnare la retta perpendicolare a uno qualsiasi dei tre lati del triangolo, individuando il punto T_1: la circonferenza di centro O_1 e raggio O_1T_1 è la prima circonferenza cercata.
4. Per disegnare le circonferenze esterne (che sono **tre**) è necessario individuare i tre excentri del triangolo ABC: ogni excentro è un punto equidistante dai lati di due angoli esterni del triangolo e dal loro lato comune. Gli excentri del triangolo ABC sono i punti O_2, O_3, O_4, centri delle tre circonferenze exinscritte.
5. Analogamente a quanto fatto per la circonferenza interna al triangolo ABC al punto 3, individuare i punti di tangenza T_2, T_3 e T_4 delle tre circonferenze exinscritte cercate.
6. Disegnare dunque la circonferenza di centro O_2 e raggio O_2T_2, quella di centro O_3 e raggio O_3T_3 e quella di centro O_4 e raggio O_4T_4.

5.1.3 Punto punto retta (PPT)

Costruzione



1. Tracciare gli elementi geometrici assegnati, ovvero due punti (che chiameremo A e B) e una retta r.

2. Tracciare la retta s passante per A e per B, che costituisce la secante comune alle due circonferenze γ_1 e γ_2 che dobbiamo trovare.

3. Individuare sulla retta r il punto d'intersezione S con la retta s. A questo punto della costruzione possiamo riconoscere due segmenti che si riconducono al *teorema della secante e della tangente*, ovvero AS (secante esterna) e BS (intero segmento secante).

4. Su un foglio a parte, dobbiamo trovare il segmento medio proporzionale tra AS e BS, ovvero il segmento $T_1S \cong T_2S$ tale che $AS : T_1S = T_1S : BS$. Possiamo dimostrare questa informazione ($T_1S \cong T_2S$), considerando il disegno già concluso, in questo modo: se, per il *teorema della secante e della tangente*, è $AS : T_1S = T_1S : BS$ e $AS : T_2S = T_2S : BS$ ed essendo $AS \cong AS$ e $BS \cong BS$, allora si ottiene che
$$T_1S \cong T_2S.$$

   Per trovare il segmento medio proporzionale occorre utilizzare come costruzione ausiliaria quella derivante dal primo teorema di Euclide.

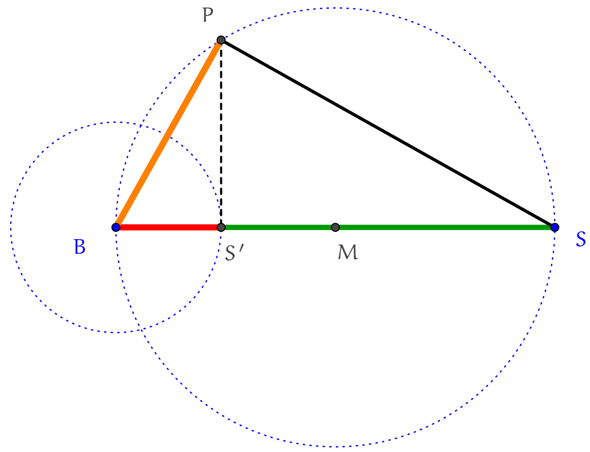
   (a) Riportare su una retta qualsiasi l'intero segmento secante BS.

   (b) A partire dall'estremo B, riportare il segmento secante esterno AS che diverrà (poiché qui $A \equiv B$) il segmento BS'.

   (c) Disegnare la circonferenza δ avente per diametro il segmento BS (con riga e compasso occorre prima trovare il punto medio di BS per trovare il raggio).

   (d) Tracciare la perpendicolare al segmento BS per il punto S' ed individuare il suo punto P d'intersezione con δ.

   (e) Abbiamo così trovato il segmento BP, medio proporzionale tra BS e BS' ($BS' \cong AS$). Infatti il primo teorema di Euclide riporta che *"in un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione di tale cateto sull'ipotenusa"*. Dunque il segmento BP è il segmento che cerchiamo che ci consente di individuare sulla retta r i punti T_1 e T_2, e dunque i segmenti di tangenza.

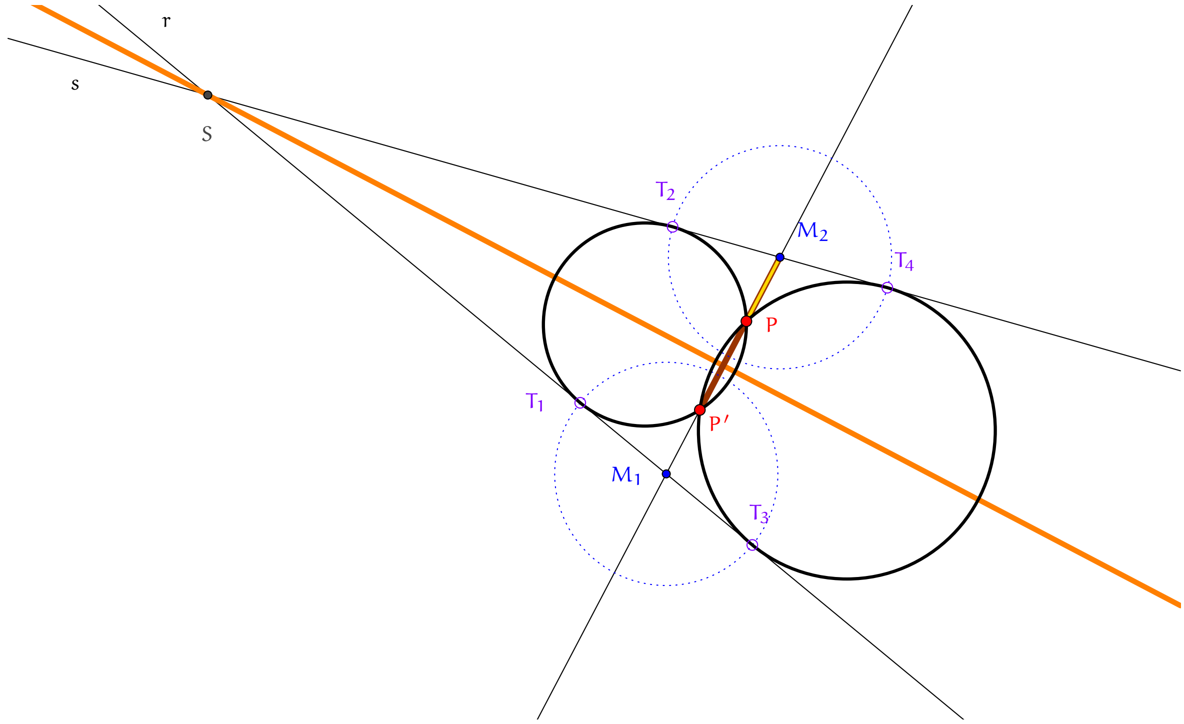


(f) Trasportare il segmento BP sulla retta r del disegno principale tramite una circonferenza di centro S che intersecherà la retta r nei punti T_1 e T_2 della dimostrazione (l'immagine della costruzione basata sul teorema di Euclide non è proposta secondo la scala corretta al fine di consentire una maggiore comprensione).

5. Condurre le due circonferenze passanti per i punti A e B e tangenti a r l'una in T_1 e l'altra in T_2.

5.1.4 Punto retta retta (PTT)

Costruzione



1. Disegnare le tre circonferenze degeneri, in questo caso un punto P e due rette r e s: è meglio che le rette non siano parallele poiché, se così fosse, si otterrebbe un caso particolare, poco utile, se non fuorviante, al nostro intento di comprendere la costruzione più generale possibile.

2. Tracciare la bisettrice dell'angolo corrispondente alla parte di piano in cui si trova il punto P. Infatti, considerando la costruzione già conclusa, tale bisettrice costituirebbe la retta che congiunge i centri delle due circonferenze γ_1 e γ_2 che dobbiamo cercare.

3. Sempre considerando il problema come già risolto, troviamo il punto simmetrico P' di P rispetto alla suddetta bisettrice. *Perché proprio il simmetrico di* P*?* Se le due circonferenze che dobbiamo trovare devono entrambe passare per il punto P, quest'ultimo può generare soltanto due casi differenti: o si trova sulla retta che congiunge i centri delle circonferenze (e dunque sulla bisettrice) oppure **non** si trova su tale retta (questo, come quello in figura, è il caso più generale possibile).

   - Se il punto P si trova sulla retta dei centri (bisettrice in arancio), esso e il suo simmetrico coincidono, ovvero esso stesso è un *punto unito* della simmetria, trovandosi ad essere proprio sull'asse che origina la trasformazione geometrica.
   - Se il punto P invece non si trova sulla retta dei centri, allora significa che è un punto comune alle due circonferenze che devono essere obbligatoriamente secanti: ciò significa che esiste un secondo punto di intersezione delle due circonferenze, che si trova esattamente alla medesima distanza di P dalla retta dei centri (questo risultato si ottiene proprio con la simmetria assiale).

4. Tracciare la retta passante per P e P', che è perpendicolare alla bisettrice disegnata al punto 2.

5. Si individuino poi i punti M_1 e M_2 in cui tale retta interseca le rette assegnate r ed s: M_1 e M_2 rappresentano rispettivamente i punti medi dei segmenti (che dobbiamo ancora trovare!!) T_1T_3 e T_2T_4. Infatti considerando il problema come già risolto, le rette passanti per i punti di tangenza appartenenti alla medesima circonferenza, secondo il teorema delle tangenti, sono perpendicolari alla retta dei centri. Essendo anche la retta passante per P e P' perpendicolare alla retta dei centri, si ottiene che le rette che congiungono i rispettivi punti di tangenza di ogni circonferenza e quella per i punti P e P' devono essere parallele.

Ora, per il teorema della secante e della tangente, si dimostra che i due segmenti di tangenza su r sono congruenti ($T_1M_1 \cong M_1T_3$), e pure quelli sulla retta s (e dunque $T_2M_2 \cong M_2T_4$). In realtà, i quattro segmenti ora citati sono tutti congruenti: infatti per il teorema di Talete si dimostra che, se i segmenti di tangenza devono essere congruenti, $ST_1 \cong ST_2$ e $ST_3 \cong ST_4$ (questo è grazie al teorema delle tangenti!), individuando con un fascio di rette parallele alla retta T_1T_2 (e perpendicolare alla retta dei centri) la retta PP' passante per i punti medi dei segmenti T_1T_3 e T_2T_4, anche le metà dei segmenti T_1T_3 e T_2T_4 devono essere congruenti.

Quindi abbiamo dimostrato che non solo M_1 e M_2 sono rispettivamente i punti medi dei segmenti T_1T_3 e T_2T_4, ma anche che i segmenti che tali punti medi individuano su T_1T_3 e T_2T_4 sono tutti congruenti. Questo costituisce un vantaggio per la costruzione.

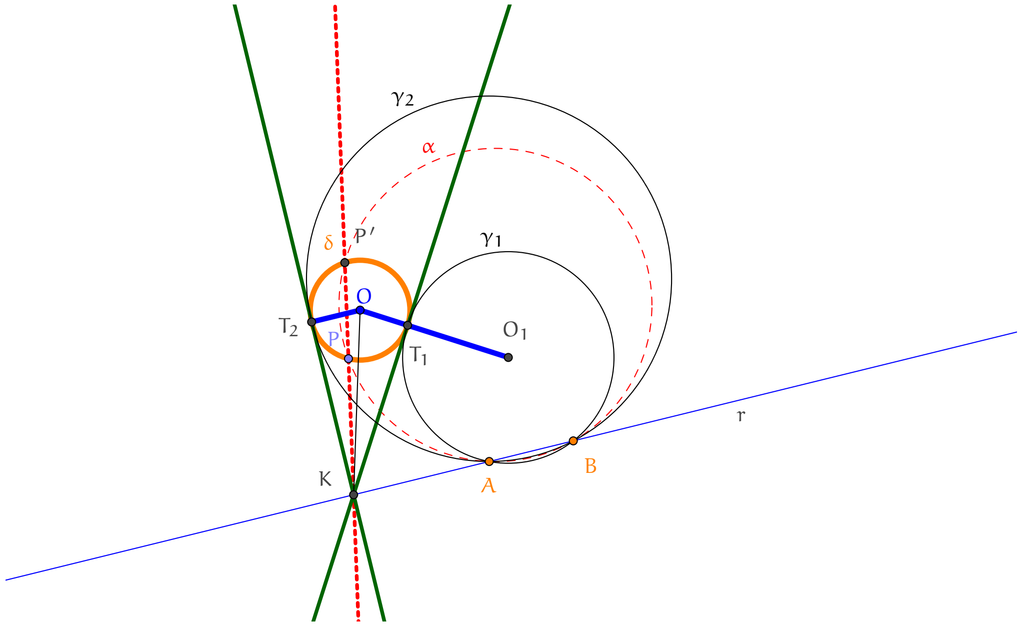
6. A questo punto possiamo applicare, come può suggerirci il metodo di Cartesio per la risoluzione dei problemi, una regola che abbiamo trovato in precedenza: dobbiamo condurre due circonferenze passanti per due punti assegnati (in questo caso P e P', punti in cui le due circonferenze secanti si intersecano) e tangenti ognuna a una retta assegnata (si può scegliere una retta tra r e s). Avendo scelto come retta cui le due circonferenze dovranno essere tangenti la retta s, utilizzando la costruzione che deriva dal primo teorema di Euclide troviamo i segmenti medi proporzionali tra $P'M_2$ e PM_2 (rispettivamente segmento secante e parte esterna del primo). Il segmento che individuiamo tramite questa costruzione è quello che ci consente di trovare tutti i punti di tangenza T_1, T_2, T_3, T_4.

7. Operiamo il trasporto del segmento medio proporzionale tra $P'M_2$ e PM_2 sulle rette assegnate r e s a partire dai punti medi M_1 (trovando così T_1 e T_3) e M_2 (trovando infine T_2 e T_4).

8. Tracciare le circonferenze passanti l'una per P, T_1 e T_2 e l'altra per P, T_3 e T_4.

5.1.5 Punto punto circonferenza (PPC)

Costruzione



1. Disegnare gli elementi geometrici assegnati dal problema, ovvero la circonferenza δ e i due punti A e B. Tali punti devono essere o entrambi interni alla circonferenza o entrambi esterni oppure al massimo uno dei due appartenente a δ: questo è abbastanza intuitivo.

   Infatti, supponendo di avere un punto esterno e uno interno alla circonferenza e di avere tracciato la circonferenza β tangente a δ e passante per A, non si potrebbe mantenere la condizione di tangenza poiché dovremmo far passare tale circonferenza anche per B, che si trova in un'altra regione del piano (a seconda di dove si trova A, interna o esterna a δ): per fare ciò, si dovrebbe per forza intersecare la circonferenza e annullare la condizione di tangenza.

2. Tracciare la retta r passante per A e B.

3. Scegliere un punto qualunque P sulla circonferenza δ e tracciare la circonferenza ausiliaria α passante per P, A e B.

4. Individuare il punto K in cui la secante comune alle circonferenze α e δ (ovvero la retta PP') interseca la retta r: tale punto è anche l'origine per cui sono condotte (considerato il problema già risolto) le tangenti comuni alle circonferenze da trovare e a quella data δ.

5. Tracciare le tangenti alla circonferenza δ passanti per K.

6. Individuare i punti T_1 e T_2 in cui tali tangenti intersecano la circonferenza α: questi sono i punti in cui rispettivamente le circonferenze γ_1 e γ_2 (ancora da trovare!!) saranno tangenti alla circonferenza data α.

7. Per concludere, tracciare le due circonferenze γ_1 e γ_2, l'una passante per i punti A, B, T_1 e l'altra passante per A, B, T_2.

Dimostrazione

La dimostrazione di tale costruzione richiede la conoscenza di diverse nozioni e teoremi riguardanti l'*asse radicale* di circonferenze secanti.

Innanzitutto, definiamo **potenza di un punto** rispetto a una circonferenza data, avendo tracciato una qualsiasi secante alla circonferenza assegnata, il prodotto tra l'intero segmento secante e la sua parte esterna. Nel caso riportato nella costruzione, per esempio, la potenza di K rispetto a δ è il rettangolo (ovvero il prodotto) di KP e KP$'$.

L'**asse radicale** di due circonferenze *non concentriche* è il luogo dei punti del piano (contenente le circonferenze) aventi la stessa potenza rispetto ad esse. Inoltre l'asse radicale di due circonferenze è **perpendicolare** alla retta che passa per i centri delle circonferenze.

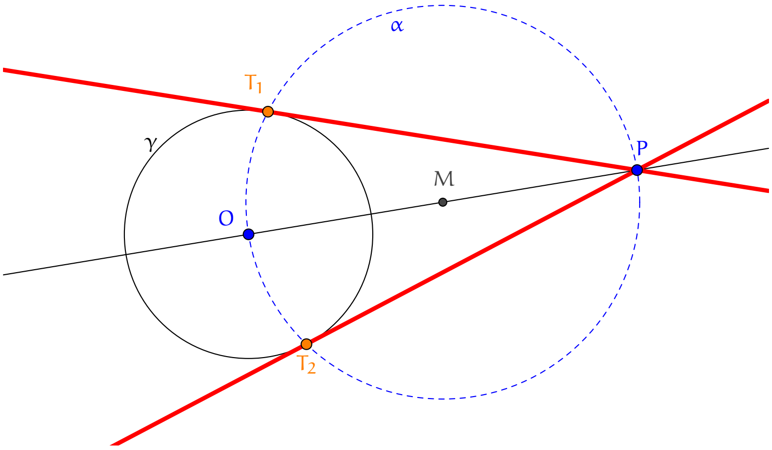
Apprese tali informazioni, possiamo dimostrare una proprietà dell'asse radicale (applicabile in questo caso) secondo cui "gli assi radicali di tre circonferenze i cui centri non sono allineati, si intersecano in un punto chiamato **centro radicale** delle tre circonferenze".

1. Nel disegno la retta PP$'$ è l'asse radicale delle due circonferenze α e δ: ciò significa che tutti i punti di tale retta hanno potenza $p_{\alpha-\delta}$.
2. Analogamente, si deduce che, essendo la retta per T_1 tangente comune delle circonferenze δ e γ_1, essa è l'asse radicale di tali circonferenze e ogni punto dell'asse ha potenza pari a $p_{\delta-\gamma_1}$.
3. Per la stessa ragione, la retta per T_2 tangente comune a δ e γ_2 è l'asse radicale di tali circonferenze e i punti di tale asse hanno tutti potenza pari a $p_{\delta-\gamma_2}$.
4. Dal momento che gli assi radicali di α e γ_1 si intersecano in un unico punto K, allora avremo che $p_{\alpha-\delta} = p_{\delta-\gamma_1}$.
5. In modo analogo, se gli assi radicali di α e γ_2 si intersecano in un unico punto K, allora avremo che $p_{\alpha-\delta} = p_{\delta-\gamma_2}$.
6. Per la proprietà transitiva della congruenza, $p_{\alpha-\delta} = p_{\delta-\gamma_1} \wedge p_{\alpha-\delta} = p_{\delta-\gamma_2} \rightarrow p_{\delta-\gamma_1} = p_{\delta-\gamma_2}$. Rimane così dimostrato come il punto K sia il punto comune ai tre assi radicali.

   Q.E.D.

5.2 Costruzione delle tangenti a una circonferenza

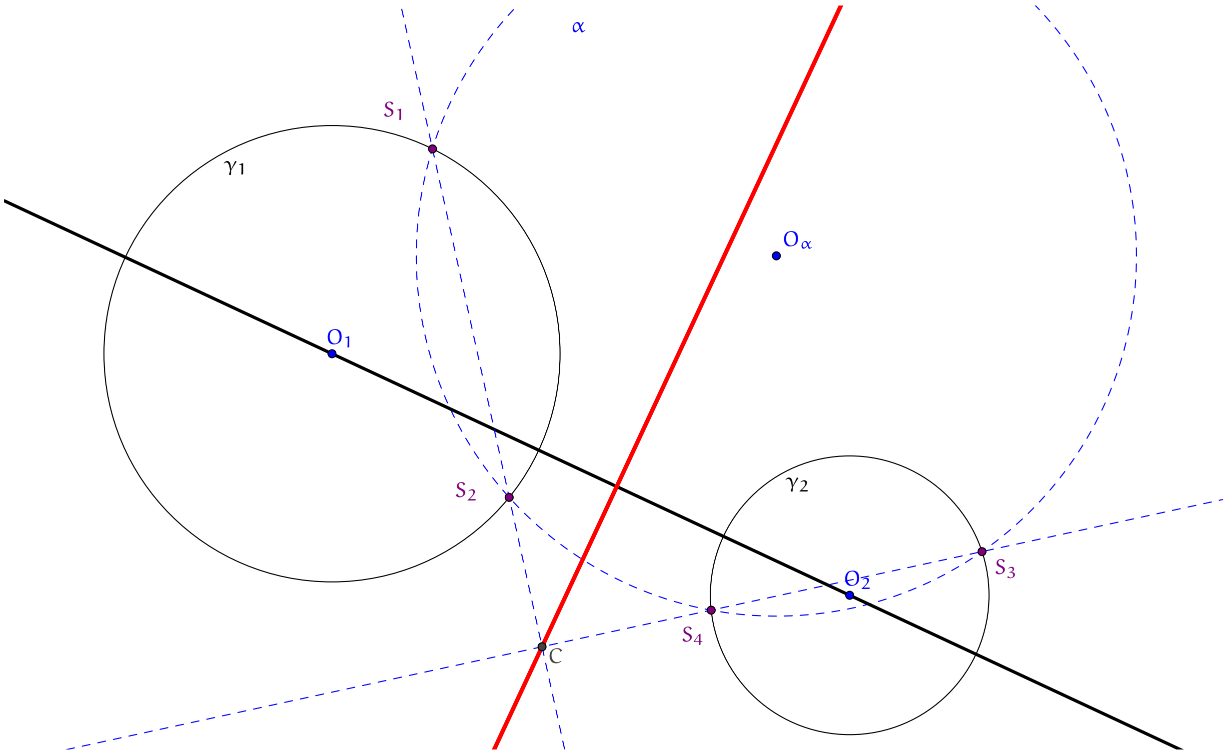
Data una circonferenza γ di centro O e un punto P esterno alla circonferenza assegnata, tracciare le due tangenti alla circonferenza suddetta passanti per P.



1. Tracciare la circonferenza ausiliaria α avente per diametro il segmento OP.
2. Individuare i punti in cui la circonferenza α interseca la circonferenza assegnata γ.
3. I punti individuati T_1 e T_2 sono i punti di tangenza delle rette tangenti da trovare: si traccino dunque le rette T_1P e T_2P.

5.3 Costruzione dell'asse radicale

La costruzione che segue questa precisazione riguarda solo il caso in cui le due circonferenze assegnate γ_1 e γ_2 siano **esterne**: per tutti gli altri casi - circonferenze tangenti o circonferenze secanti - si troveranno non solo analogie con la costruzione seguente, ma *ad abundantiam* alcune semplificazioni.



1. Dopo aver tracciato gli oggetti assegnati (le circonferenze di partenza γ_1 e γ_2 di centri rispettivamente O_1 e O_2), tracciare una **circonferenza ausiliaria** α.

2. Individuare i punti in cui α interseca le due circonferenze assegnate γ_1 e γ_2: per la prima circonferenza saranno S_1 e S_2 mentre per la seconda S_3 e S_4.

3. Tracciare le rette S_1S_2 e S_3S_4.

4. Individuare il punto di incontro delle due rette tracciate al punto 4: esso sarà il **centro radicale** C delle tre circonferenze γ_1, γ_2 e α.

   Questa prima parte della dimostrazione si bassa su una delle proprietà importanti dell'asse radicale: gli assi radicali di tre circonferenze, i cui centri non siano allineati, si incontrano in un unico punto chiamato *centro radicale*.

5. Disegnare la retta passante per i centri O_1 e O_2.

6. Tracciare la retta perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2 e passante per C: essa è l'asse radicale delle due circonferenze iniziali.

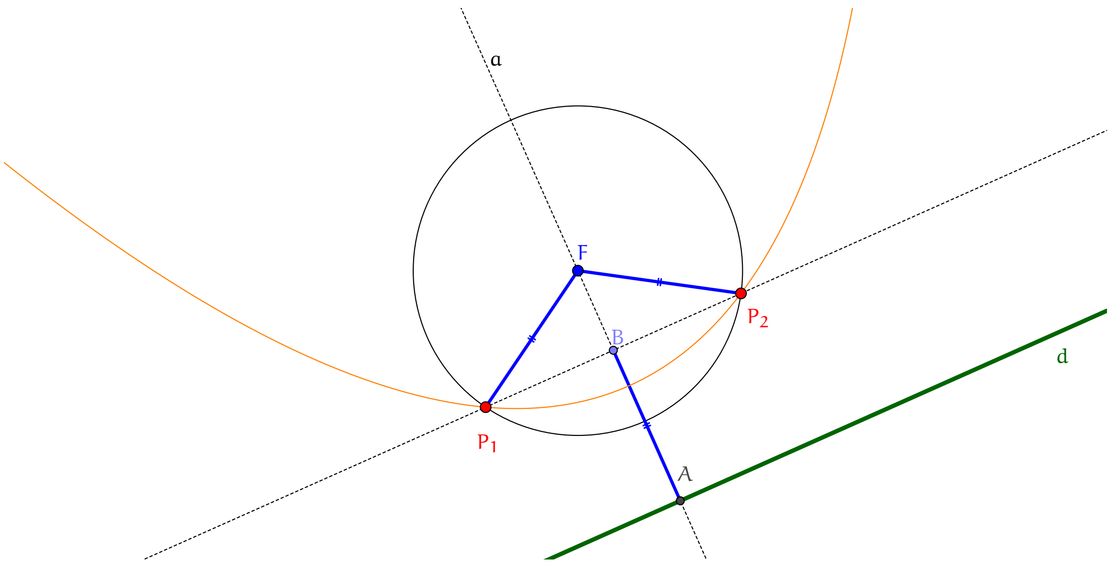
   L'ultima parte della dimostrazione si basa su un'altra importante proprietà dell'asse radicale di due circonferenze: esso è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze.

Capitolo 6

Costruzioni geometriche relative alla parabola

6.1 Costruzione della parabola come luogo di punti

Illustriamo la costruzione della parabola come **luogo dei punti** del piano equidistanti da una retta data, detta **direttrice**, e da un punto assegnato, detto **fuoco**.



1. Scegliere una retta d (direttrice) e un punto F (fuoco).

2. Tracciare la retta a perpendicolare a d che rappresenta l'asse di simmetria della parabola.

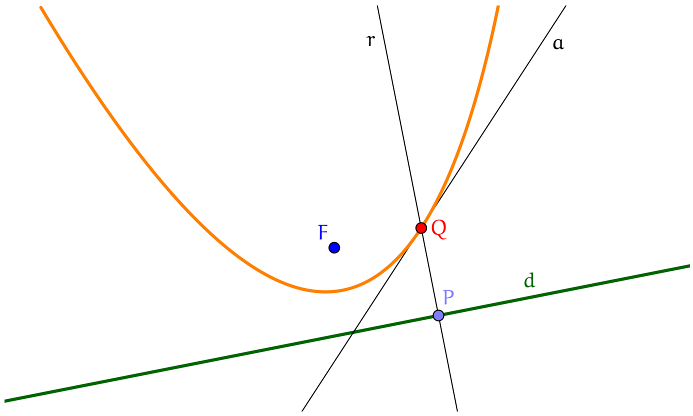
3. Su di essa scegliere un punto variabile B. Il segmento AB corrisponde alla distanza dei punti del piano dalla retta d. Tale distanza deve essere uguale alla distanza focale PF.

4. A tal proposito si tracci una circonferenza di raggio AB e centro F.

5. Tracciare una retta passante per B perpendicolare alla retta a.

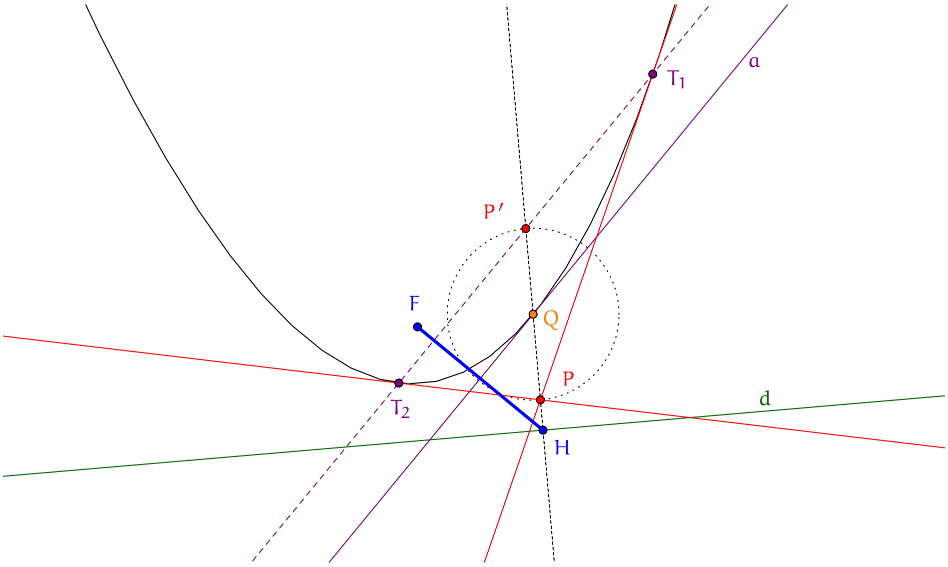
6. I punti P_1 e P_2 in cui la retta disegnata al punto precedente interseca la circonferenza sono quelli che disegnano, al variare di B sulla retta a, il luogo, ovvero la parabola.

6.2 Costruzione della parabola con la tangente



1. Disegnare un punto F, che sarà il fuoco della parabola da costruire, e una retta d, direttrice della parabola.
2. Scegliere un punto variabile P sulla retta d.
3. Tracciare la retta r perpendicolare a d passante per P.
4. Tracciare l'asse del segmento FP.
5. Individuare il punto Q, punto d'intersezione tra l'asse e la retta r: questo il punto che disegna il luogo cercato, ovvero la parabola.

6.3 Costruzione della polare di un punto rispetto a una parabola data

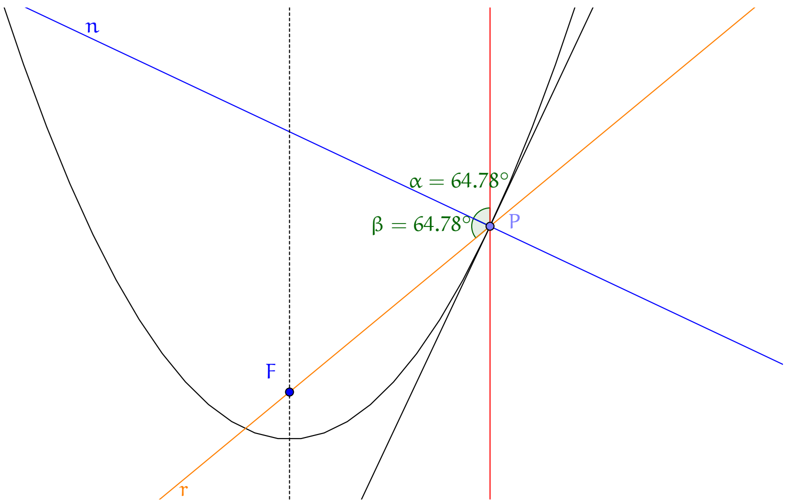


1. Disegnare la parabola assegnata, la direttrice d e il fuoco F della parabola.
2. Scegliere un P variabile del piano.
3. Tracciare la retta perpendicolare a d passante per P e individuare il suo punto di intersezione Q con la parabola assegnata e il punto H all'intersezione con d.
4. Individuare il simmetrico P' del punto P rispetto a Q (simmetria centrale).
5. Tracciare l'asse a del segmento FH.
6. Tracciare la retta parallela all'asse a e passante per P': abbiamo disegnato la **polare** di P rispetto alla parabola assegnata.
7. Per trovare graficamente le tangenti non occorre altro che individuare i punti di intersezione T_1 e T_2 della polare con la parabola e tracciare le rette T_1P e T_2P.

6.4 Costruzione della proprietà ottica della parabola

La proprietà ottica degli specchi parabolici è la seguente: *un raggio luminoso proveniente dal fuoco viene riflesso da uno specchio a sezione parabolica in direzione parallela all'asse e, viceversa, un raggio proveniente secondo una direzione parallela all'asse è riflesso nel fuoco della parabola.*

Ecco di seguito la rappresentazione grafica.



1. Disegnare una parabola e il suo fuoco F.

2. Scegliere un punto P variabile appartenente alla parabola.

3. Tracciare la retta FP: questa retta rappresenta il raggio luminoso che, uscendo dal fuoco, incontra in P la superficie dello specchio parabolico.

4. Tracciare la tangente alla parabola per P e la retta ad essa perpendicolare, che chiameremo n, *normale alla superficie riflettente*.

5. Tracciare dunque la retta simmetrica rispetto ad n della retta FP. Questa retta rappresenta il raggio riflesso: esso deve essere parallelo all'asse di simmetria della parabola.

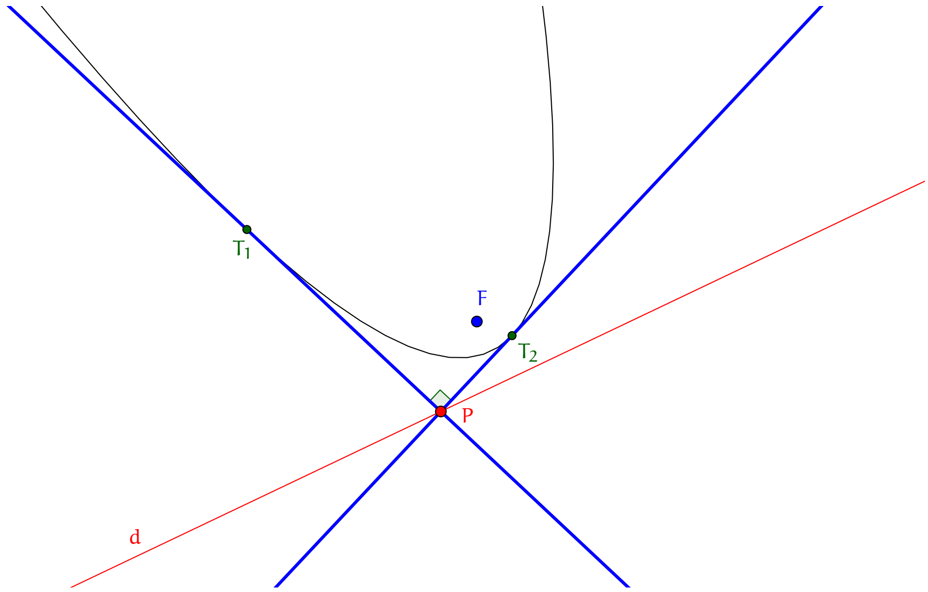
Si può dimostrare algebricamente che la retta tracciata all'ultimo punto è parallela all'asse della parabola e che dunque la proprietà ottica è verificata. La costruzione può subire una variazione, modificando così la dimostrazione algebrica: anziché dimostrare che la retta che rappresenta il raggio rifletto sia parallela all'asse, si potrebbe dimostrare che la normale alla superficie è anche bisettrice dell'angolo acuto formato dalle rette FP e n.

6.5 Costruzione della curva ortottica della parabola

Prima di illustrare la costruzione, esponiamo brevemente che cosa sia la *curva ortottica* di una conica. La curva ortottica è una particolarità della **curva isottica**.

Si definisce curva isottica di una conica il luogo Δ dei vertici di un angolo di ampiezza costante α del piano in cui risiede la conica i cui lati rimangono tangenti alla conica data. Nel caso particolare in cui $\alpha = 90°$ la curva sinottica viene ora detta **ortottica**.

Attenendoci all'etimologia greca, possiamo definire la curva isottica come il luogo dei punti dai quali la curva data è vista sotto l'angolo costante α.



Nel caso della parabola, l'ortottica è rappresentata dalla **direttrice**.

1. Tracciare una parabola e evidenziamo la sua direttrice d.
2. Scegliere un punto P variabile su d.
3. Tracciare le tangenti alla parabola passanti per P.
4. Verificare che le rette T_1P e T_2P sono perpendicolari.

Si può dimostrare algebricamente che i coefficienti angolari delle rette tangenti tracciate sono *antireciproci*, ovvero l'uno è l'opposto e reciproco dell'altro; si può anche dire che il loro prodotto è pari a -1. Per la dimostrazione algebrica è conveniente considerare una parabola canonica.

Capitolo 7

Problemi risolti

In questa sezione sono presenti quattro problemi risolti utilizzando il maggior numero di metodi illustrati nelle precedenti trattazioni.

7.1 Parabola tangente ad una retta in un punto e passante per un punto

risoluzione di Massimo Buzzi

Scrivere l'equazione della parabola che è tangente alla retta t di equazione $y = mx + q$ nel suo punto T di ascissa x_T e passa per il punto A di coordinate (x_A, y_A). Rappresentare graficamente e risolvere il problema in tre modi diversi.

7.1.1 Metodo del fascio 1

1. **Creare il fascio di circonferenze con punti base A e T** con le due generatrici γ_1 e γ_2.

   γ_1: retta per A e $T \rightarrow \dfrac{y - y_A}{y_T - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_T - x_A}$

   γ_2: coppia di rette $\rightarrow (x - x_T)(x - x_A) = 0$

   Combinando linearmente le due generatrici (γ_1 e γ_2) si ottiene il fascio:

   $$y = mx + q + k(x - x_T)(x - x_A).$$

2. **Mettere in sistema il fascio di circonferenze e la retta tangente** t:
   $$\begin{cases} y = mx + q + k(x - x_T)(x - x_A) \\ y = mx + q \end{cases}.$$

3. **Si calcola il discriminate Δ e si imposta uguale a 0 come condizione di tangenza.**
   In questo modo si ottengono i due valori di k coincidenti che risolvono l'equazione. Si sostituisce quindi il valore di k trovato nell'equazione generale del fascio, ottenendo così la parabola richiesta.

7.1.2 Metodo del fascio 2

1. **Creare il fascio di circonferenze con punto base T**:

   γ_1: retta tangente t per $T \rightarrow y = mx + q$

   γ_2: coppia di rette coincidenti $\rightarrow (x - x_T)^2 = 0$

   Combinando linearmente le due generatrici (γ_1 e γ_2) si ottiene il fascio:

   $$y = mx + q + k(x - x_T)^2.$$

2. **Passaggio per A (sostituire x e y con le coordinate del punto)**:

$$y_A = mx_A + q + k(x_A - x_T)^{\cdot}$$

3. **Sostituire il valore di k trovato nell'equazione generale del fascio, ottenendo l'equazione della parabola cercata**

7.1.3 Metodo "consideralo già risolto"

Bisogna creare un sistema con tre equazioni in tre variabili a, b e c in modo tale da trovare i valori che compaiono nella formula generale della parabola ($y = ax^2 + bx + c$).

Quali sono le tre equazioni?

1. **Passaggio per A**
   Si sostituiscono le coordinate del punto A nell'equazione generale della parabola:

$$y_A = a(x_A)^2 + bx_A + c.$$

2. **Passaggio per T**
   Si sostituiscono le coordinate del punto O nell'equazione generale della parabola:

$$y_T = a(x_T)^2 + bx_T + c.$$

3. **Condizione di tangenza**
   Si crea un ulteriore sistema con due equazioni: la formula generale della parabola e l'equazione della retta t. Si sostituisce e si impone il discriminante uguale a zero, in questo modo si crea la terza e ultima equazione necessaria per creare il sistema.
   Si può quindi creare il sistema e applicando la sostituzione è possibile ottenere i tre valori dei parametri a, b e c, che sostituiti nell'equazione generale della parabola danno la parabola desiderata.

7.2 Parabola passante per tre punti assegnati

risoluzione di Leonardo Ferrari

Trovare l'equazione di una parabola passante per tre punti dati. Coordinate dei tre punti:
$A(x_A; x_A)$
$B(x_B; x_B)$
$C(x_C; x_C)$

7.2.1 I tre punti sono allineati

Se i tre punti sono allineati allora otterremo una parabola degenere (retta passante per i tre punti).
Per calcolare l'equazione basterà creare un sistema con solo due dei tre punti:

$$\begin{cases} y - y_A = m(x - x_A) \\ y - y_B = m(x - x_B) \end{cases} .$$

7.2.2 I tre punti non sono allineati

Metodo consideralo già risolto

1. Come prima cosa si ricava il sistema sostituendo le x e le y dei tre punti dati all'equazione generale della parabola ($y = ax^2 + bx + c$ o $x = ay^2 + by + c$):

$$\begin{cases} y_A = ax_A^2 + bx_A + c \\ y_B = ax_B^2 + bx_B + c \\ y_C = ax_C^2 + bx_C + c \end{cases}.$$

2. In seguito ricaviamo a, b e c; dopo averli sostituiti nell'equazione generale della parabola, si otterrà la parabola passante per i tre punti dati.

Metodo del fascio

1. Come prima cosa si ricava il fascio di parabole passanti per due dei tre punti:

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B),$$

in cui $y = mx + q$ è la retta passante per A e B.

2. Infine per trovare la parabola passante per i tre punti si mette a sistema il fascio di parabole con il punto:

$$\begin{cases} y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B) \\ x = x_C \quad \vee \quad y = y_C \end{cases}$$

dal quale otterremo il valore di k. Sostituendo k nell'equazione del fascio di parabole, otterremo l'equazione della parabola passante per i tre punti.

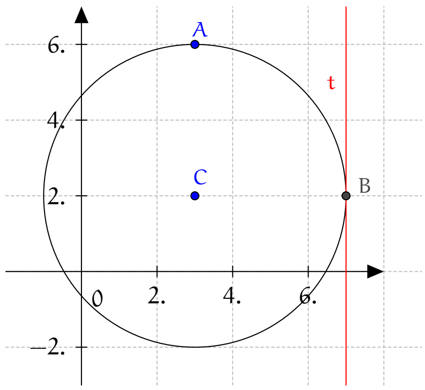
Metodo del luogo di punti

In questo caso il metodo del luogo di punti risulterebbe complicato e svantaggioso, quindi meglio accantonarlo e usare gli altri due metodi a disposizione.

7.3 Circonferenza per un punto e tangente a una retta in un punto

risoluzione di Alessia Alinovi

Trova la circonferenza passante in $A(3;6)$ e tangente in $B(7;2)$ alla retta $x - 7 = 0$.



7.3.1 Metodo del fascio

Per determinare l'equazione del fascio occorre combinare linearmente l'equazione di due circonferenze passanti per A e B.

Come prima circonferenza prendiamo quella che ha il segmento AB come diametro.

$M_{AB}(5;4)$
$AB = 4\sqrt{2}$
$r = 2\sqrt{2}$.

Utilizzando $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ricaviamo la prima circonferenza $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0$.

Come seconda circonferenza prendiamo la circonferenza degenere che passa per A e B: $x + y - 9 = 0$.

L'equazione del fascio è $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 + k(x + y - 9) = 0$.

Mettiamo a sistema il fascio con la tangente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 + k(x + y - 9) = 0 \\ x = 7 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema troviamo $k = 4$ che sostituito nell'equazione del fascio trova la circonferenza:

$$\gamma : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0.$$

7.3.2 Metodo "consideralo già risolto"

Per utilizzare questo metodo imponiamo il passaggio della circonferenza per A e B

$$\begin{cases} \textit{Passaggio } A \\ \textit{Passaggio } B \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema troviamo $b = a + 2$ e $c = -9a - 57$ da cui l'equazione della circonferenza in funzione di a

$$x^2 + y^2 + ax + (a + 2)y - 9a - 57 = 0.$$

Costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + (a + 2)y - 9a - 57 = 0 \\ x - 7 = 0 \end{cases}.$$

Giunti all'equazione risolvente imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ ottenendo

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Ora possiamo individuare l'equazione della circonferenza richiesta:

$$\gamma : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0.$$

7.3.3 Metodo del luogo di punti

Per utilizzare questo metodo supponiamo che il centro sia $C(x; y)$ e imponiamo che $\overline{CA} = \overline{CB}$:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 2)^2}.$$

Risolvendo troviamo l'asse del segmento che ha equazione $x - y - 1 = 0$ su cui giace C.

Determiniamo poi la retta perpendicolare alla tangente nel punto B che passa anche per C, essendo orizzontale sarà $y = y_B$ quindi $y = 2$.

A questo punto per trovare il centro basta creare il seguente sistema

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Trovando la soluzione si ottiene che $C(3;2)$ e $r = \overline{AC} = 4$.

L'equazione della circonferenza cercata risulta essere

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$
$$\gamma : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0.$$

7.4 Circonferenze per due punti e tangenti a una retta data

risoluzione di Alessandro Del Bono

Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1;2)$ e $Q(3;4)$ e tangente alla retta t di equazione $y = -3x + 3$.

7.4.1 Metodo del luogo di punti

1. Questo problema è una delle formulazioni del Problema di Apollonio: si tratta del caso che contempla il caso in cui la conica (circonferenza) passi per due punti dati e sia tangente ad una retta assegnata. Risolvendo il problema con questo metodo perciò troveremo la retta r passante per i punti P e Q, ovvero $y = x + 1$.

2. Mettiamo ora a sistema l'equazione della retta t e quella della retta r per determinare il loro punto di intersezione O.

$$\begin{cases} y = -3x + 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad O\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

3. Occorre ora trovare il segmento medio proporzionale tra OQ e OP: per farlo basta calcolare le due distanze OP e OQ e impostare la proporzione $OQ : m = m : OP$. Questo procedimento si rifà al teorema della secante e della tangente, elementi entrambi presenti e riconoscibili nella costruzione a problema terminato: la tangente è rappresentata dalla retta t mentre la retta secante è r, congiungente i punti in cui le due circonferenze-soluzione si intersecano.

4. Si calcolino dunque le lunghezze $\overline{OQ}$ e $\overline{OP}$ attraverso la formula della distanza tra due punti: $\overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{OP} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

5. Risolvendo la proporzione otteniamo la lunghezza del segmento medio proporzionale che risulta $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

6. Per trovare i due punti di tangenza T_1 e T_2 sarà sufficiente creare una circonferenza di centro O e raggio la lunghezza del medio proporzionale: l'espressione analitica di tale circonferenza è $\gamma : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

7. Mettendo a sistema l'equazione corrispondente alla circonferenza ottenuta e quella della retta tangente t si otterranno i due punti di tangenza T_1 e T_2.

8. Infine, per individuare le espressioni analitiche delle due circonferenze che costituiscono la soluzione al problema è sufficiente applicare il protocollo necessario per scrivere l'equazione di una circonferenza passante per tre punti con il metodo del luogo di punti (infatti uno dei tre punti è di tangenza e la perpendicolare alla tangente passante per tale punto intersecherà l'asse di PQ nel centro della circonferenza). Le equazioni cercate sono $c_1 : x^2+y^2-3x-7y+12 = 0$ e $c_2 : x^2+y^2-8x-2y+7 = 0$.

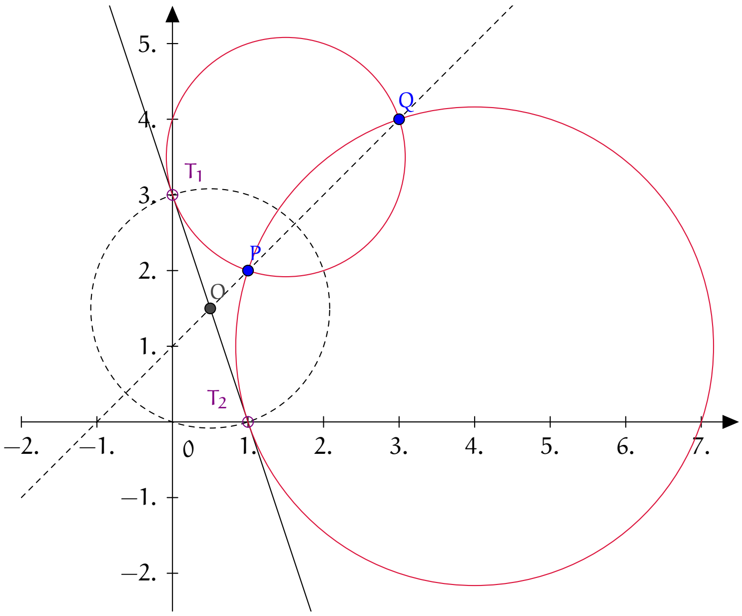


Figura 7.1: Rappresentazione grafica

7.4.2 Metodo "consideralo già risolto"

1. Imponiamo alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ il passaggio per i punti P e Q ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ 3a+4b+c=-25 \end{cases} .$$

2. Ricaviamo da ciò due incognite in funzione della terza, perciò si avrà $b=-a-10$ e $c=a+15$.

3. A questo punto l'equazione della circonferenza cercata (in realtà sono due!) risulterà $x^2+y^2+ax-(a+10)y+a+15=0$: occorre applicare la condizione di tangenza alla retta t.

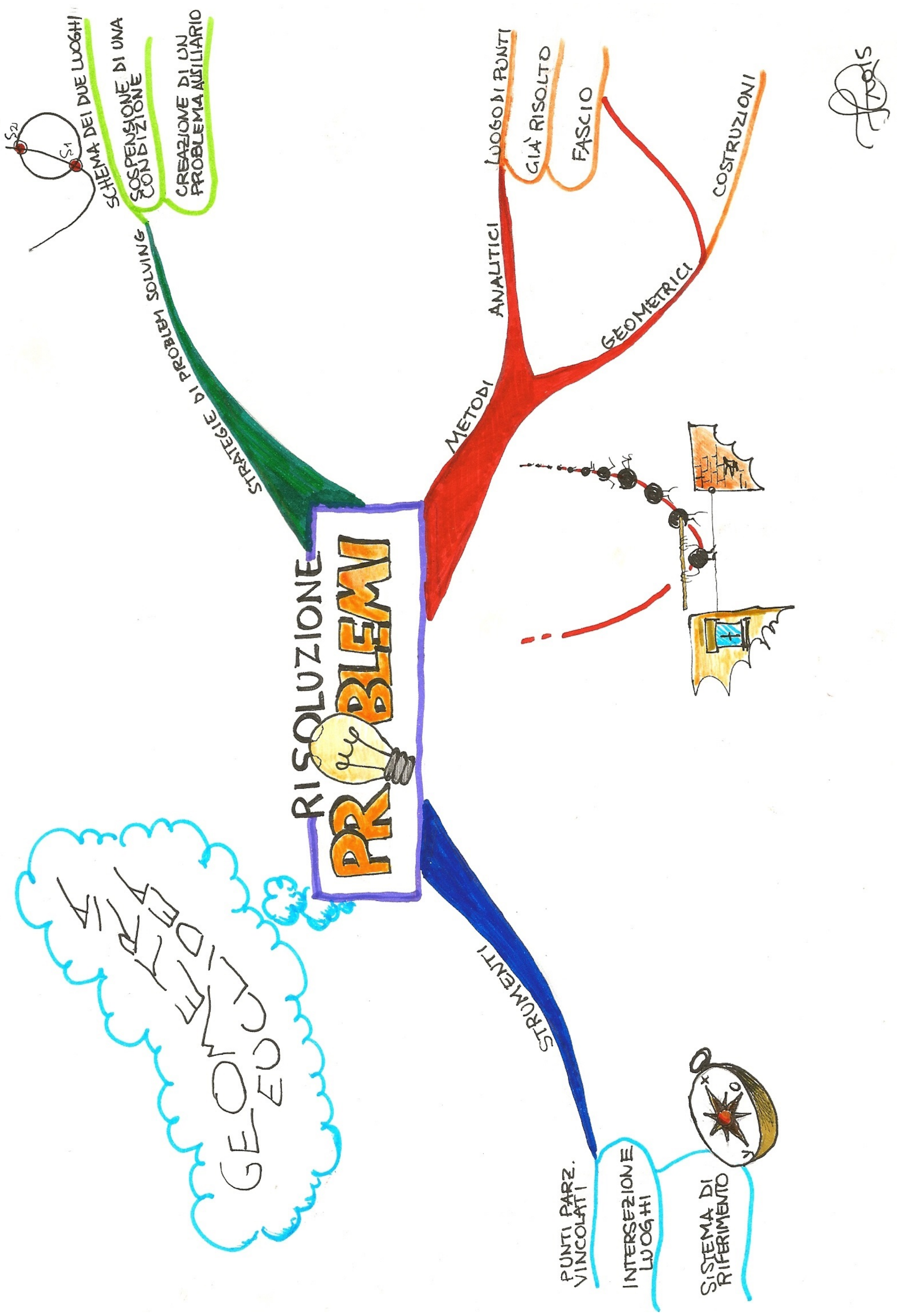
4. Si giunge, risolvendo il sistema, all'equazione risolvente $5x^2+2(a+3)x-(a+3)=0$.

5. Imponendo la condizione di tangenza $\Delta=0$, si ottengono i due risultati $a=-3$ e $a=-8$.

6. Trovati i due valori di a, si calcolano quelli dei parametri b e c, prima per un risultato e poi per il secondo, e sostituendo si ottengono le due circonferenze $c_1 : x^2+y^2-3x-7y+12=0$ e $c_2 : x^2+y^2-8x-2y+7=0$.

Problema tratto dal testo
Bergamini, Trifone, Barozzi, *Matematica.blu 2.0*, vol. 3, Zanichelli,
ISBN 9788898257208,
pg. 279 n. 195.

Mappa dei metodi



Liceo Attilio Bertolucci Editore

ISBN 9788898952052

Editato in
Parma ottobre 2015

Liceo Attilio Bertolucci Editore

Via Toscana 10/a - 43122 Parma
prps05000e@istruzione.it - 0521 798459

ISBN 9788898952052